

Staatika

Juhend ülesannete lahendamiseks

Feliks Angelstok

Õppevahend on mõeldud Sisekaitseakadeemia päästeteenistuse eriala (õppekava kinnitatud siseministri käskkirjaga 13.05.2002. a) üliõpilastele õppeaines „Teoreetiline mehaanika”.

Teoreetilise mehaanika kursuse osa „Staatika” on väga oluline järgnevate inseneriainete nagu „Tugevusõpetus” ja „Ehituskonstruksioonid” mõistmiseks. Tähtsal kohal on praktiliste ülesannete lahendamise oskus, mille omandamiseks käesolev juhend üliõpilastele abiks on.

Üliõpilastel tuleb, lisaks auditooriumis käsitletuile, lahendada iseseisvalt viis, kursuse olulisemate teemade kohta käivat koduülesannet. Juhend ongi jaotatud vastavalt teemadele viide ossa. Iga osa sissejuhatuses tuuakse lühidalt olulisemad teoreetilised seisukohad. Seejärel lahendatakse mõned näidisülesanded ja sõnastatakse koduülesande tekst. Koduülesande juurde kuuluv joonis või skeem on igal üliõpilasel erinev ja selle annab õppejõud üliõpilasele isiklikult.

Koduülesande iseseisval lahendamisel saadavad kogemused kuuluvad üliõpilasel marjaks ära kontrolltööde ülesannete lahendamisel. Kontrolltööde hinded on otsustava tähtsusega aine eksamihinde kujunemisel.

Käesolev juhend ei asenda aine õpikuid, milleks võib soovitada Sisekaitseakadeemia raamatukogus piisavalt olevaid trükiseid:

- Endel Topnik. Teoreetilise mehaanika põhivara. TTÜ Masinaõpetuse Instituut. Tallinn 1998, 87 lk,
- Taivo Liiva. Teoreetiline mehaanika I. Staatika. TTÜ Tallinna Kolledž. Tallinn 2008, 91 lk.

Õppevahend võib olla kasulik kõigile üliõpilastele, kelle õppekavas on teoreetilise mehaanika või insenerimehaanika kursused.

© Sisekaitseakadeemia, 2008

Sisekaitseakadeemia
Kase 61 12012, Tallinn
aprill 2008

SISUKORD

1. SIDEMETE REAKTSIOONIDE MÄRKIMINE JOONISTEL	4
2. JÕU PROJEKTSIOON TELJEL	6
3. KEHA TASAKAAL	10
4. SÕRESTIK	13
5. RASKUSKESE.....	20

1. SIDEMETE REAKTSIOONIDE MÄRKIMINE JOONISTEL

Staatika uurib jõudude mõju all olevate kehade tasakaalu. Tasakaalu all mõistetakse keha paigalseisu teiste kehade suhtes. Tasakaalu Maa või Maaga jäigalt seotud kehade suhtes nimetatakse absoluutseks. Vaadeldavaid kehi käsitletakse kui absoluutselt jäiksid, st kui kehi, mille mistahes kahe punkti vaheline kaugus on muutumatu.

Jäigad kehad on vabad kui neid saab antud asendist üle viia mistahes uude asendisse.

Keha, mille liikumist ruumis takistavad teised, temaga kokkupuutuvad kehad, nimetatakse seotuks.

Keha liikumist piiravaid tingimusi nimetatakse *sidemeiks*.

Sideme reaktsiooniks nimetatakse jõudu, millega mõjub antud kehale see keha, mis moodustab sideme.

Sideme reaktsiooni suund on vastupidine sellele suunale, kuhu side ei luba kehal liikuda.

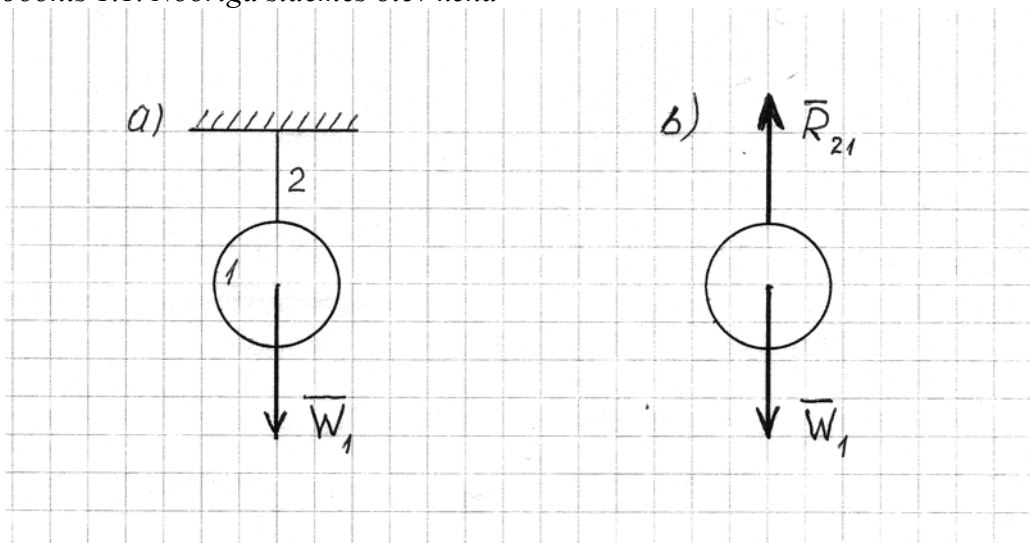
See on reegel, mis ülesannete lahendamisel aitab reaktsioonijõudude suundi õigesti määrata.

Reaktsioonid on passiivsed jõud, kuna nad takistavad kehade liikumist. Jõud, mis põhjustavad või on võimelised põhjustama kehade liikumist, on aktiivsed jõud. Nende jõudude hulka kuuluvad raskusjõud ja muud motoorsed jõud.

Näiteid sidemete reaktsioonidest.

Kehale 1 mõjuv raskusjõud \vec{W}_1 (joonis 1.1a), paneks keha liikuma allapoole, kuid temaga sidemes olev nöör 2 ei luba sellist liikumist. Sideme reaktsioon on suunatud vastu võimaliku liikumise suunale, seega ülespoole (joonis 1.1b).

Joonis 1.1. Nööriga sidemes olev keha



Käesoleva õppevahendi tekstis on jõud kui vektor tähistatud suure tähega paksus kirjas. Joonistel tähistab vektorit tema tähise kohale tõmmatud kriips. Õpikutes on jõu kui vektori tähise kohale tavaliselt pandud nool või kriips. Jõu mooduli tähisena kasutatakse suurt tähte tavalises kirjas.

Sidemete aksioomi kohaselt võib vaadelda iga seotud keha vabana, kui jätta ära sidemed ja asendada need reaktsioonijõududega.

Rakendame seda aksioomi kehale 1 (joonis 1.1b) ja vabastame ta sidemest nööri 2. Sideme asendame reaktsioonijõuga \mathbf{R}_{21} , mis iseloomustab ärajäetud sideme mõju kehale 1.

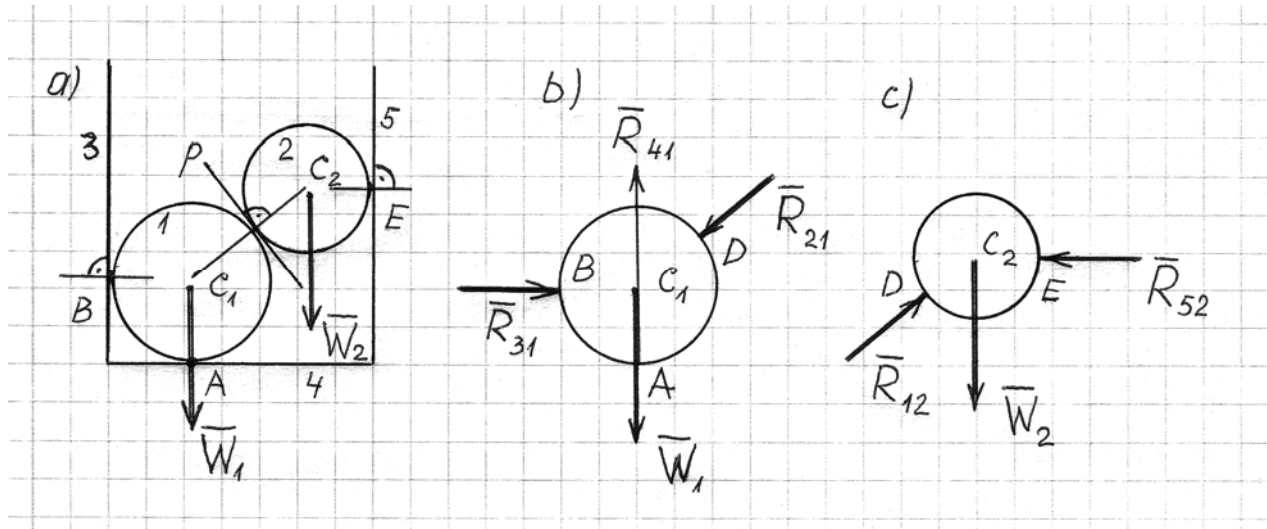
Reaktsioonijõu tähises kasutame kahest numbrist koosnevat indeksit. Esimene neist näitab milline keha avaldab reaktsioonijõudu ja teine näitab, millisele kehale ta seda avaldab. Niisiis antud juhul reaktsioon \mathbf{R}_{21} tähendab reaktsioonijõudu, mida nöör 2 avaldab kehale 1. Tasakaalu aksioomi kohaselt on ta moodulilt võrdne kehale 1 mõjuva aktiivse jõu – raskusjõu mooduliga $R_{21} = W_1$.

Järgnevalt rakendame sidemete aksioomi kehadele, mis on teiste kehadega väga mitmesugustes sidemetes. Erinevatele sidemetele omaseid reaktsioonijõude käsitlevad põhjalikult õpikud (näiteks T.Liiva õpikus lk 11 – 14), mistõttu neid kõiki siinkohal üksikasjalikumalt ei vaatle.

Ülesanne 1.1

Kaks rasket keha on kitsas ruumis ja toetuvad vastu seinu ning põrandat (joonis 1.2a). Kehade tasakaalu uurimiseks vabastame nad sidemetest ja märgi kõik kehadele mõjuvad jõud. Kõik kontaktis olevad pinnad on siledad, st hõõrdejõude pole vaja arvestada.

Joonis 1.2. Kahe keha tasakaalu uurimine



Keha 1 on sidemetes kehaga 2, seinaga 3 ja põrandaga 4. Kõik sidemed kujutavad endast toetumist siledale pinnale, mille reaktsiooni siht on risti pinnaga. Kehade 1 ja 2 vahelise reaktsiooni sihi leidmiseks tõmbame kõigepealt neile puutepunkti ühise puutuja p ja siis sellega risti oleva reaktsiooni sihi. Kõik reaktsioonide sihid on markeeritud joonisel 1.2a.

Vabastame nüüd keha 1 sidemetest ja joonistame välja talle mõjuvad jõud (joonis 1.2b). Et keha on raske, siis mõjub talle aktiivne jõud – raskusjõud \mathbf{W}_1 , mis on rakendatud raskuskeskmes C_1 . Sidemest põrandaga 4 mõjub kehale reaktsioon punktis A . Selle reaktsioonijõu \mathbf{R}_{41} siht on risti põrandaga ja suunatud ülespoole, kuna side ei luba kehal liikuda allapoole.

Sidemest seinaga 3 mõjub kehale reaktsioon punktis B . Selle reaktsioonijõu \mathbf{R}_{31} siht on risti seinaga ja suunatud paremale, kuna side ei luba kehal liikuda vasakule.

Sidemest kehaga 2 mõjub kehale 1 reaktsioon punktis D . Selle reaktsioonijõu \mathbf{R}_{21} siht on risti kehade ühise puutuajaga p ja suunatud alla vasakule, kuna side ei luba kehal liikuda üles paremale.

Need neli jõudu, millest üks on aktiivne jõud ja kolm passiivsed reaktsioonijõud, mõjutavad keha 1 tasakaalu. Reaktsioonijõudude väärtuste leidmiseks tuleks järgnevalt koostada ja lahendada tasakaaluvõrrandid. Sellega tegeldakse käesoleva õppevahendi kolmandas osas.

Vabastame nüüd keha 2 sidemetest ja joonistame välja talle mõjuvad jõud (joonis 1.2c). Et keha on raske, siis mõjub talle aktiivne jõud – raskusjõud \vec{W}_2 , mis on rakendatud raskuskeskmes C_2 .

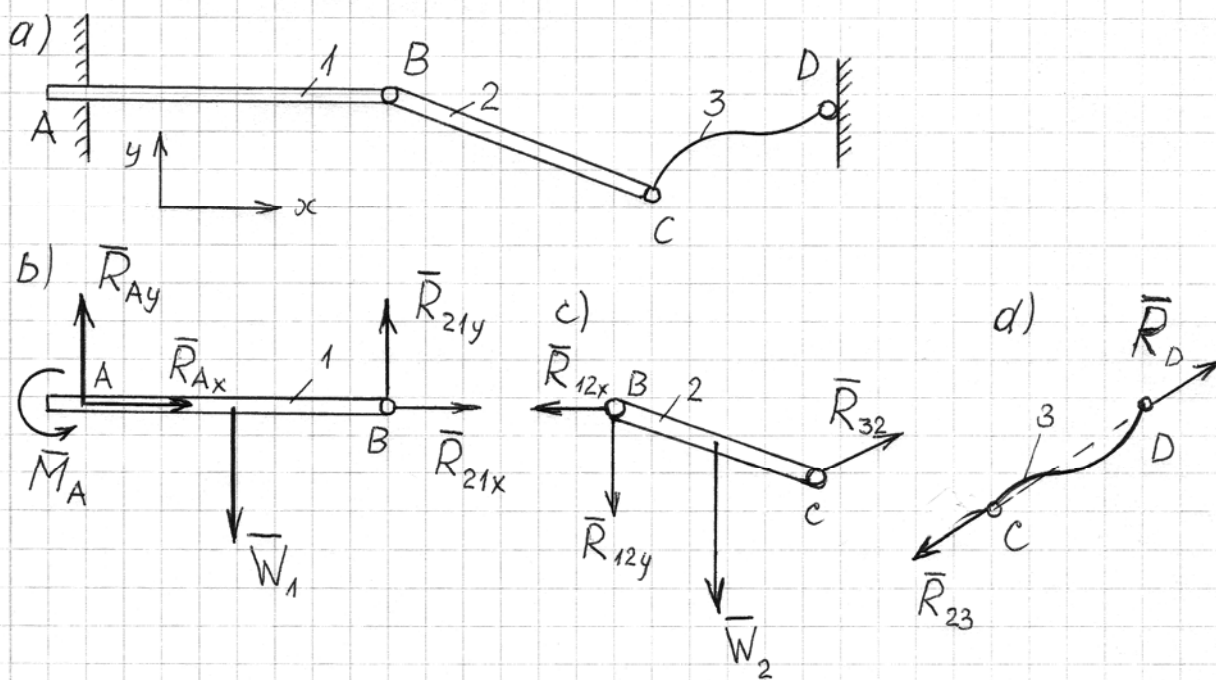
Sidemest seinaga 5 mõjub kehale punktis E reaktsioon risti seinaga. See reaktsioonijõud \vec{R}_{52} on suunatud vasakule, kuna sein ei luba kehal liikuda paremale. Sidemest kehaga 1 mõjub kehale 2 reaktsioon punktis D . Selle reaktsioonijõu \vec{R}_{12} siht on risti kehade ühise puutujaga p ja suund üles paremale, kuna keha 1 ei luba kehal 2 liikuda alla vasakule. Need kolm jõudu, millest üks on aktiivne jõud ja kaks passiivsed reaktsioonijõud, mõjutavad keha 2 tasakaalu.

Paneme tähele, et reaktsioonijõud \vec{R}_{12} on suunalt vastupidine reaktsioonijõule \vec{R}_{21} ning suuruselt sellega võrdne mõju ja vastumõju aksiooni kohaselt.

Ülesanne 1.2

Kaks rasket tala, millest 1 on müüritud seinale A (joonis 1.3a), on ühendatud omavahel liigendiga B . Tala 2 on otsast C toetatud kerge vardaga 3. Uurida kehade 1, 2 ja 3 tasakaalu vabastades nad sidemetest ja märkides neile kõik mõjuvad jõud.

Joonis 1.3. Toetatud talad



Tala 1 on koormatud raskusjõuga \vec{W}_1 ja on otsast A absoluutselt jäigalt kinnitatud seinale. Selline tugi võtab vastu jõudu igas suunas, mistõttu reaktsioon \vec{R}_A võib olla suvalise suunaga, ja teda tuleb otsida kahe komponendi \vec{R}_{Ax} ja \vec{R}_{Ay} (joonis 1.3b) kaudu. Oletame, et need komponendid on suunatud koordinaattelgede x ja y positiivses suunas. Millised on nende suunad tegelikkuses, see selgub pärast tasakaaluvõrrandite koostamist ja lahendamist. Sellega hakkame tegelema õppevahendi kolmandas peatükis. Esialgul lepime sellise oletusega. Lisaks sellele takistab tugi A tala pöördumist ja seetõttu tuleb eeldada ka pöördemomendi \vec{M}_A olemasolu, mille suunaks oletame pööramist vastupäeva. Tegelik suund selgub samuti pärast tasakaaluvõrrandite lahendamist.

Teisest otsast on tala 1 liigendiga B seotud talaga 2. Et liigend võtab vastu jõudu igas suunas, siis tuleb siingi reaktsiooni \vec{R}_{21} otsida tema kahe komponendi \vec{R}_{21x} ja \vec{R}_{21y} kaudu. Nendelgi komponentidel oletame koordinaattelgede positiivsete suundadega kokkulangevaid suundi.

Tala 2 on koormatud oma raskusega W_2 ja seotud liigendiga B (joonis 1.3c) talaga 1 ning liigendiga C kerge vardaga 3. Reaktsioon liigendis B oli vaatluse all juba tala 1 tasakaalu uurimisel. Mõju ja vastumõju aksioomi kohaselt on reaktsioonid liigendis B R_{21} , mis mõjub talale 1, ja reaktsioon R_{12} , mis mõjub talale 2, võrdsed ja vastassuunalised. Mõlemat reaktsiooni tuleb otsida nende komponentide kaudu. Talale 1 mõjuvate reaktsiooni komponentidel R_{21x} ja R_{21y} oletasime suundi koordinaattelgedele x ja y positiivses suunas. Talale 2 mõjuvate reaktsiooni komponentidel R_{12x} ja R_{12y} tuleb seega oletada suundi x ja y telje negatiivses suunas. Kuna vastavalt mõju ja vastumõju aksioomile peavad nad olema vastassuunalised.

Liigendis C , nagu punktis B , võiks samuti otsida reaktsiooni kahe komponendi kaudu. Et aga selles liigendis teine osapool on kerge varras, siis pole see ratsionaalne. Kerges vardas, mis on koormatud vaid oma otspunktides, mõjub jõud nende otspunktide sihis. Seega mõjuvad nii punktis C kui ka punktis D reaktsioonid sihis CD . Seega on reaktsiooni siht punktis C teada ja teda pole vaja otsida kahe komponendi kaudu. Jääb üle määrata vaid reaktsiooni suund. Arvestades talade asendit, võib eeldada, et reaktsioon liigendis C on suunatud üles punkti D poole. Reaktsioon R_{32} takistab tala 2 otsal C liikumast alla.

Kergele vardale 3 ei mõju ühtegi aktiivset jõudu, mistõttu tema tasakaalule avaldavad mõju vaid otspunktides mõjuvad reaktsioonid. Punktis C mõjub talle tala 2 poolt reaktsioon R_{23} , mis on võrdne ja vastassuunaline äsjavaadeldud reaktsioonile R_{32} . Liigendiga D on kerge varras 3 kinnitatud seinale. Selleski liigendis pole mõtet otsida reaktsiooni kahe komponendi kaudu, sest tegemist on kerge vardaga, milles mõjub jõud tema otspunktide CD sihis. Seega võib eeldada, et punktis D on seina reaktsioon vardale 3 R_D suunatud üles, vastassuunas reaktsioonile R_{23} .

Kõik kolm keha, mille tasakaalu oli vaja uurida, on sidemetest vabastatud ja kõigile on märgitud kõik neile mõjuvad jõud. Järgnevalt on võimalik koostada kehade tasakaaluvõrrandid ja nende lahendamisele leida reaktsioonijõudude väärtused. Sellega hakkame tegelema käesoleva õppevahendi kolmandas peatükis.

KODUÜLESANNE NR. 1

Materiaalsetest kehadest koosnev süsteem, mille skeemi annab õppejõud, toetub alusele.

Uurida skeemil märgitud kehade tasakaalu, märkides neile kõik mõjuvad jõud.

Mõned skeemil näidatud kehad on rasked, st neile mõjuvat raskusjõudu tuleb ülesande lahendamisel arvestada, teised kerged. Neile mõjuva raskusjõu võib jätta arvestamata.

Vabasta kehad, mille tasakaalu on vaja uurida, sidemetest ja joonista nad eraldi välja.

Kanna nendele joonistele kehale mõjuvaid aktiivseid jõude tähistavad vektorid. Need on jõud F_i , kui neid on ülesandes antud, ja rasketele kehadele mõjuvad raskusjõud.

Kanna samadele joonistele sidemetest teiste kehade ja alusega tingitud reaktsioonijõude tähistavad vektorid. Viimaste tähistamisel kasuta kahekohaliste indeksitena kehadele omistatud numbreid.

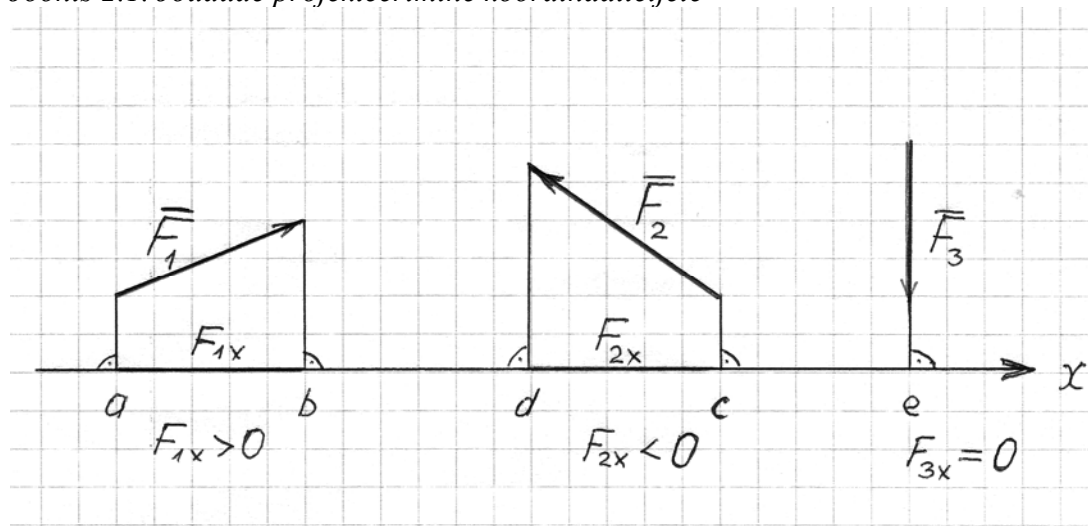
2. JÕU PROJEKTSIOON TELJEL

Jõudude projektsioone koordinaattelgedele vajame edaspidi tasakaaluvõrrandite koostamisel ja lahendamisel.

Jõud on teatavasti vektoriaalne suurus, mida iseloomustavad suurus ehk moodul ja suund. Jõu projektsioon teljel saab olla vaid teljesihiline ja pole seetõttu mitte vektoriaalne vaid skalaarne suurus.

Jõu F_I (joonis 2.1) projektsiooni F_{Ix} teljel x leiame insenerigraafikast tuntud projekteerimise võttega.

Joonis 2.1. Jõudude projekteerimine koordinaatteljele



Selleks laseme objekti iseloomulikest punktidest, milleks on vektori otspunktid, läbi projekteerimiskiired risti ekraaniga, milleks on koordinaattelg x . Saame jõuvektori alguspunkti projektsiooni teljel a ja lõpppunkti projektsiooni b (joonis 2.1). Lõik nende vahel ab ongi jõu F_1 projektsioon F_{1x} teljel x .

Jõu projektsioon teljel loetakse positiivseks kui liikumine jõu alguspunkti projektsioonist a jõu lõpppunkti projektsiooni b poole toimub telje positiivses suunas.

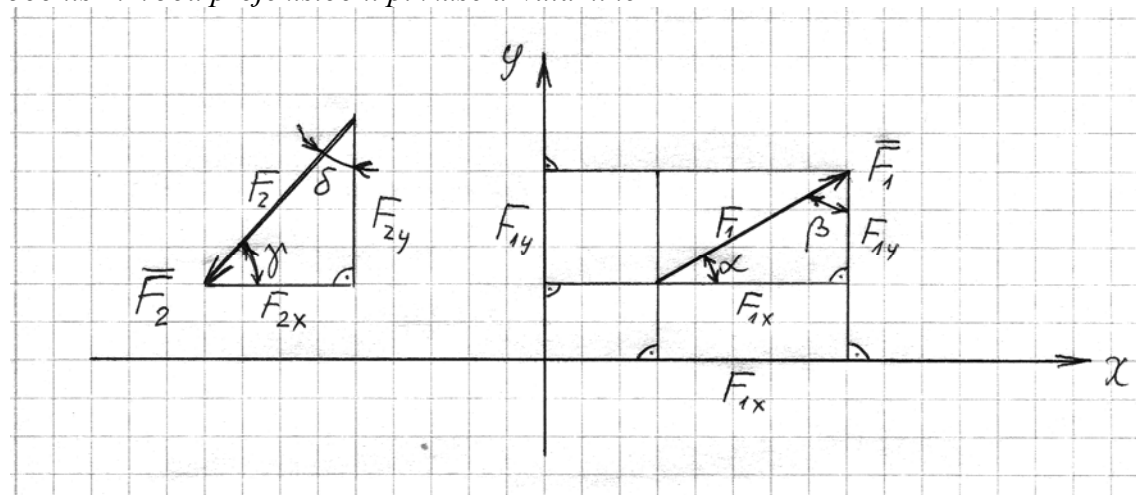
Seega on joonisel 2.1 olev jõu F_1 projektsioon positiivne $F_{1x} > 0$, sest liikudes jõu alguspunkti projektsioonist a lõpp-punkti projektsiooni b poole liigume telje x positiivses suunas.

Jõu F_2 (joonis 2.1) projektsioon teljel x , mille leiame analoogselt eelkirjeldatule, lõik cd on negatiivne $F_{2x} < 0$, sest liikudes jõu alguspunkti projektsioonist c lõpppunkti projektsiooni d poole liigume teljel negatiivses suunas.

Jõu F_3 (joonis 2.1) projekteerimisel teljele x projekteeruvad jõu alguspunkt ja lõpppunkt telje ühte ja samasse punkti e . Seega $F_{3x} = 0$.

Projektsiooni pikkuse arvutamiseks on vaja teada jõuvektori moodulit ehk suurust ja suunda. Moodulit väljendab valitud maastaabis vektori pikkus. Suund on määratud nurkade abil, mille jõuvektor moodustab koordinaattelgedega. Tõmmates jõuvektori algus- ja lõpppunktist koordinaattelgede sihte märkivad sirglõigud (joonis 2.2), võime vektori F_1 suuna määrata kas nurga α abil, mille ta moodustab x teljega, või nurga β abil, mille ta moodustab y teljega. Jõud F_1 asub koordinaattelgedega jaotatud tasandi I veerandis.

Joonis 2.2. Jõu projektsiooni pikkuse arvutamine



Jõu F_1 projektsioonide pikkuste arvutamiseks kasutame täisnurkse kolmnurga abi, milles x teljega paralleelse kaateti pikkus on võrdne projektsiooniga F_{1x} ja y teljega paralleelse kaateti pikkus on võrdne projektsiooniga F_{1y} . Hüpotenuusiks selles kolmnurgas on jõuvektori F_1 moodul F_1 . Trigonomeetriliste funktsioonide definitsioonide kohaselt täisnurkses kolmnurgas võime kirjutada

$$\sin \alpha = \frac{F_{1y}}{F_1}, \sin \beta = \frac{F_{1x}}{F_1}, \cos \alpha = \frac{F_{1x}}{F_1}, \cos \beta = \frac{F_{1y}}{F_1}.$$

Siit otsitavate projektsioonide pikkused avalduvad kui

$$F_{1x} = F_1 \cdot \cos \alpha = F_1 \cdot \sin \beta,$$

$$F_{1y} = F_1 \cdot \sin \alpha = F_1 \cdot \cos \beta.$$

Need on mõlemad positiivsed, sest liikumine jõuvektori alguspunkti projektsioonist lõpupunkti projektsiooni poole toimub nii x kui ka y telje positiivses suunas.

Jõuvektor F_2 (joonis 2.2) asub koordinaattelgedega x ja y jaotatud tasandi II veerandis. Jõu suund on määratud nurkadega γ ja δ , mille jõuvektor moodustab koordinaattelgedega. Jõuvektori F_2 projektsioonid koordinaattelgedel on arvutatavad täisnurksest kolmnurgast, mille x teljega paralleelne kaatet on võrdne projektsiooniga F_{2x} ja y teljega paralleelne kaatet võrdne projektsiooniga F_{2y} . Trigonomeetrilised funktsioonid on täisnurkses kolmnurgas defineeritud kui

$$\sin \gamma = \frac{F_{2y}}{F_2}, \sin \delta = \frac{F_{2x}}{F_2}, \cos \gamma = \frac{F_{2x}}{F_2}, \cos \delta = \frac{F_{2y}}{F_2}.$$

Siit võib avaldada jõu projektsioonid teljel, kuid seejuures tuleb lisada märk „+” või „-”, et võtta arvesse jõu projektsiooni märki vastavalt eeltoodud definitsioonile.

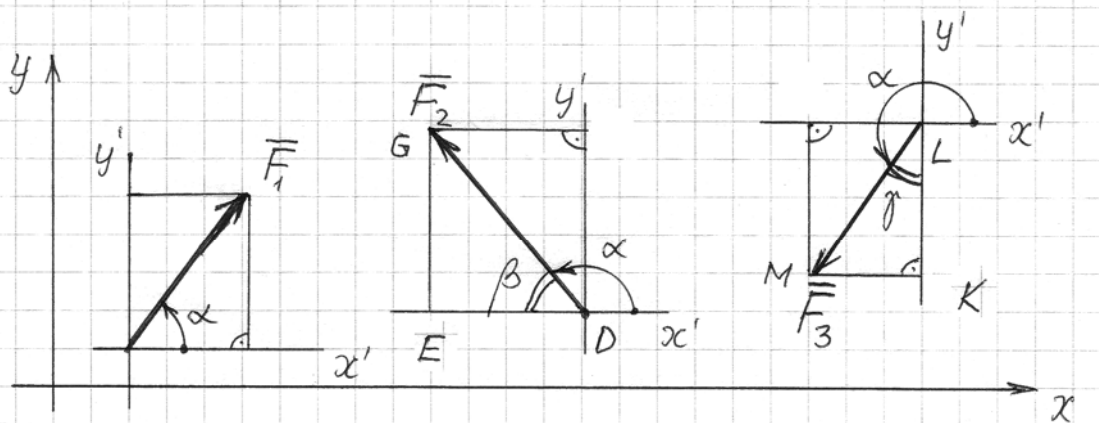
$$F_{2x} = -F_2 \cdot \sin \delta = -F_2 \cdot \cos \gamma,$$

$$F_{2y} = -F_2 \cdot \sin \gamma = -F_2 \cdot \cos \delta.$$

Antud juhul on mõlemad projektsioonid negatiivsed, sest liikumine jõu alguspunkti projektsioonist lõpupunkti projektsiooni poole toimub mõlemal koordinaatteljel negatiivses suunas.

See, et jõud asub tasandi teises veerandis ja tema projektsioon x teljel F_{2x} asub tervikuna x telje negatiivsel osal, ei oma projektsiooni märki määramisel tähtsust. Oluline on vaid see, mis suunas toimub liikumine jõu alguse projektsioonist jõu lõpupunkti projektsiooni poole. Kui see toimub telje positiivses suunas, on projektsioon positiivne. Kui negatiivses suunas, on projektsioon negatiivne.

Joonis 2.3. Jõu suuna märkimine



Kui kasutada jõuvektori suuna määramiseks nurka α , mille ta moodustab x telje positiivse suunaga (joonis 2.3), siis on jõu projektsioonid alati arvutatavad ühtviisi

$$\begin{aligned} F_x &= F \cdot \cos \alpha, \\ F_y &= F \cdot \sin \alpha. \end{aligned} \quad (1)$$

Ei ole tarvis lisada märke „+“, „või“, „-“. Projektsiooni märk tuleneb nõ „automaatselt“ vastava trigonomeetrilise funktsiooni märgist. Teatavasti on need seotud nurga suurusega nii nagu tabelis 2.1 toodud.

Tabel 2.1. Trigonomeetriliste funktsioonide märgid olenevalt nurga suurusest.

Veerand	Nurga suurus	sin	cos
I	0° kuni 90°	+	+
II	90° kuni 180°	+	-
III	180° kuni 270°	-	-
IV	270° kuni 360°	-	+

Vaatleme kolme jõuvektorit F_1 , F_2 ja F_3 (joonis 2.3), mille suuna määramiseks kasutame nurka α , mille nad moodustavad x telje positiivse suunaga. Nurga märkimiseks joonestame jõudude alguspunktidesse abiteljestikud x' ja y' , mis on koordinaattelgede x ja y suunalised.

Kõikide jõuvektorite projektsioonid on arvatavad ühesuguste valemite (1) järgi.

Seejuures on jõu F_1 projektsioonid $F_{1x} > 0$ ja $F_{1y} > 0$, sest nurk α on esimese veerandi nurk $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ ja tabeli 2.1 järgi on nii $\sin \alpha > 0$ kui ka $\cos \alpha > 0$.

Teise jõu F_2 projektsioonid on $F_{2x} < 0$ ja $F_{2y} > 0$, sest nurk α on teise veerandi nurk $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ ja vastavalt tabelis 2.1 toodule on $\sin \alpha > 0$ ning $\cos \alpha < 0$.

Samale tulemusele jõuame kasutades täiendnurkade mõistet (tabel 2.2). Avaldame jõu F_2 (joonis 2.3) projektsioonid telgedele täisnurksest kolmnurgast DEG ja asendame seejärel nurga $\beta = 180^\circ - \alpha$. Täiendnurkade väärtused on toodud tabelis 2.2.

Tabel 2.2. Täiendnurgad

Funktsioon	$\beta = 90^\circ \pm \alpha$	$\beta = 180^\circ \pm \alpha$	$\beta = 270^\circ \pm \alpha$	$\beta = 360^\circ - \alpha$
$\sin \beta$	$+ \cos \alpha$	$\mp \sin \alpha$	$- \cos \alpha$	$- \sin \alpha$
$\cos \beta$	$\mp \sin \alpha$	$- \cos \alpha$	$\pm \sin \alpha$	$+ \cos \alpha$

$$F_{2x} = F_2 \cos \beta = F_2 \cos (180^\circ - \alpha) = -F_2 \cos \alpha,$$

$$F_{2y} = F_2 \sin \beta = F_2 \sin (180^\circ - \alpha) = F_2 \sin \alpha.$$

Kolmanda jõuvektori F_3 projektsioonid arvutame valemite (1) järgi ning $F_{3x} < 0$ ja $F_{3y} < 0$, sest nurk α on kolmanda veerandi nurk ja tabeli 2.1 järgi on nii siinus kui ka koosinus negatiivsed.

Sama tulemuse saame täiendnurka kasutades. Avaldame jõu F_3 projektsioonid täisnurksest kolmnurgast LKM ja asendame seejärel nurga $\gamma = 270^\circ - \alpha$.

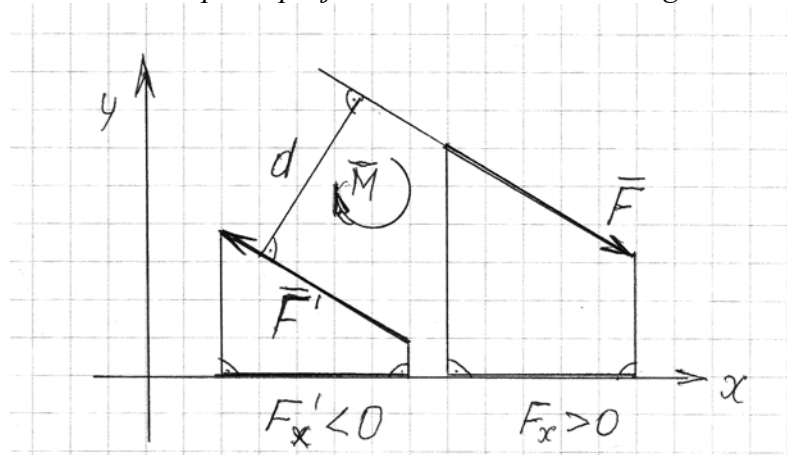
$$F_{3x} = F_3 \sin \gamma = F_3 \sin (270^\circ - \alpha) = -F_3 \cos \alpha,$$

$$F_{3y} = F_3 \cos \gamma = F_3 \cos (270^\circ - \alpha) = -F_3 \sin \alpha.$$

Kõikide nende jõuvektorite projektsioonid said oma õiged märgid nõ „automaatselt“ tänu trigonomeetrilistele funktsioonidele. See on võimalik vaid siis, kui jõuvektori suund on määratud nurga kaudu, mille ta moodustab x telje positiivse suunaga. Määrates jõuvektori suunda mistahes muu nurga abil, tuleb projektsiooni märk kirjutada ise arvestades jõuvektori alguspunkti ja lõpupunkti projektsioonide asukohta teljel.

Kui kehale on rakendatud pöördemoment, siis võib seda esitada jõupaarina. Jõupaari moodustavate jõudude projekteerimisel koordinaattelgedele saame kaks võrdset, kuid vastassuunalist projektsiooni, mille summa on null.

Joonis 2.4. Jõupaari projekteerimine koordinaattelgedele

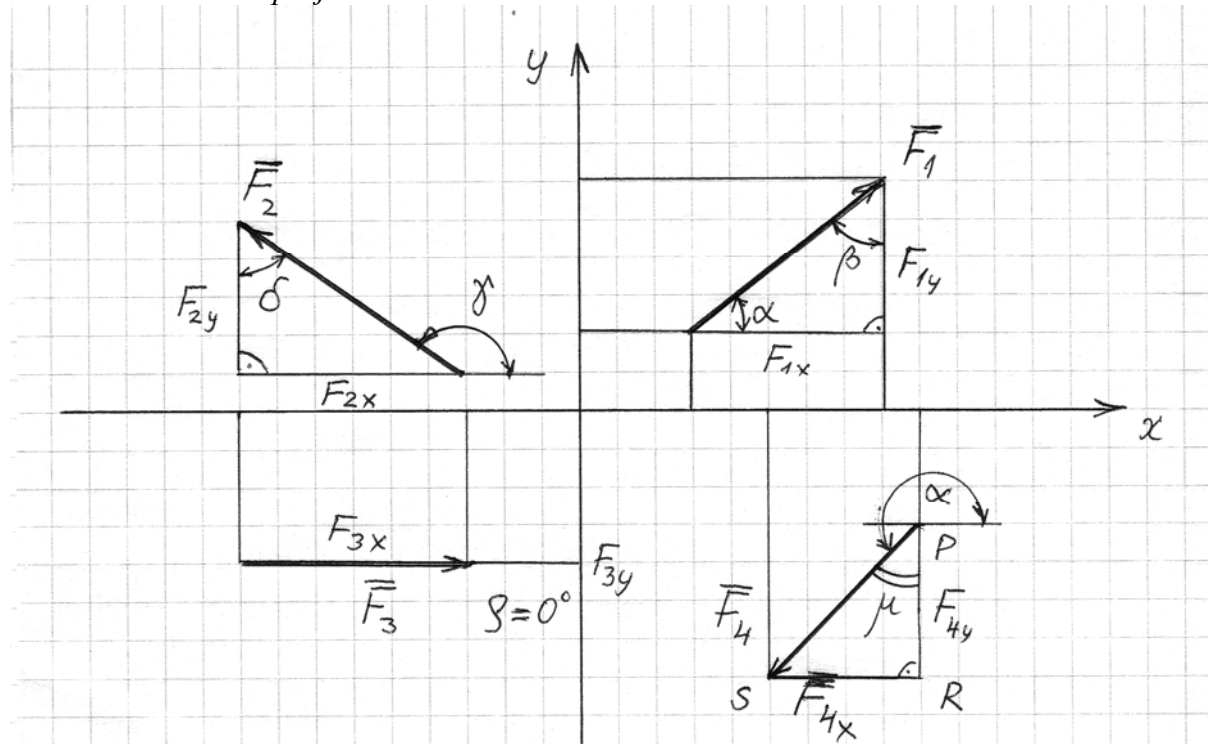


Mõjugu joonisel 2.4 kujutatud kehale pöördemoment M , mille pöörav toime on sama kui jõupaaril $F F'$, sest $M = F d = F' d$. Projekteerides jõupaari moodustavad jõud koordinaatteljele x , saame projektsioonid F_x ja F'_x . Nad on võrdse pikkusega, kuid esimene on positiivne ja teine negatiivne. Projektsioonide summa on kokku null ja seega ei avalda nad mõju keha tasakaalule. Järelikult pole neid mõtet teljele projekteerida. Samale tulemusele jõuame projekteerides jõupaari moodustavad jõud y teljele.

Ülesanne 2.1

Neli jõuvektorit F_1, F_2, F_3 ja F_4 , mille moodulid on teada, paiknevad tasandil, mille koordinaatteljed x ja y jaotavad neljaks veerandiks (joonis 2.5). Arvutada jõuvektorite F_1, F_2, F_3, F_4 projektsioonid koordinaattelgedele x ja y . Kõikide projektsioonide pikkuste arvutamiseks anda kaks varianti.

Joonis 2.5. Jõudude projektsioonide arvutamine



Jõuvektorite suunad määratakse nurkade abil, mille nad moodustavad koordinaattelgedega (joonis 2.5). Jõu F_1 projektsioonide pikkuste leidmiseks tõmbame jõu alguspunkti ja lõpupunkti koordinaattelgedega paralleelsed sirglõigud. Konstrueerime täisnurkse kolmnurga, milles nurk

jõuvektori ja x telje vahel on tähistatud α ning nurk jõuvektori ja y telje vahel β . Selles kolmnurgas x teljega paralleelne kaatet on võrdne projektsiooniga F_{1x} ja y teljega paralleelne kaatet võrdne projektsiooniga F_{1y} . Hüpotenuusi pikkus on võrdne jõuvektori mooduliga F_1 . Mõlemad projektsioonid on positiivsed ja nende pikkused on arvutatavad valemite

$$F_{1x} = F_1 \cdot \cos \alpha = F_1 \cdot \sin \beta,$$

$$F_{1y} = F_1 \cdot \sin \alpha = F_1 \cdot \cos \beta.$$

Jõud F_2 paikneb tasandi II veerandis ja tema nurk x teljega olgu tähistatud γ ning nurk y teljega δ . Nurk γ on seejuures nurk jõuvektori ja x telje positiivse suuna vahel, mistõttu jõu projektsioonide pikkused on arvutatavad valemite (1) järgi

$$F_{2x} = F_2 \cdot \cos \alpha,$$

$$F_{2y} = F_2 \cdot \sin \alpha.$$

Teise variandi jõu F_2 projektsioonide arvutamiseks kirjutame nurga δ ja täisnurkse kolmnurga abil

$$F_{2x} = -F_2 \sin \delta,$$

$$F_{2y} = F_2 \cos \delta.$$

Siinkohal on projektsiooni F_{2x} ette kirjutatud märk „-“, kuna liikumine jõu alguspunkti projektsioonist lõpupunkti projektsiooni poole toimub x telje negatiivses suunas ja seega $F_{2x} < 0$. Valemite (1) alusel kirjutatud jõu projektsioon F_{2x} saab „-“ märgi trigonomeetrilise funktsiooni \cos α abil. Et nurk α on joonise 2.4 kohaselt teise veerandi nurk, siis tabeli 2.1 järgi $\cos \alpha < 0$.

Jõud F_3 asub tasandi kolmandas veerandis ja on paralleelne x teljega. Erilise asendi tõttu (paralleelne x teljega ja seega risti y teljega) on näha, et tema projektsioon x teljel on võrdne jõu F_3 mooduliga ja on seejuures positiivne $F_{3x} = F_3$. Projektsioon y teljel $F_{3y} = 0$, sest nii jõu alguspunkt kui ka lõpupunkt projekteeruvad ühte punkti.

Teise variandina jõuvektori F_3 projektsioonide arvutamiseks võib kasutada valemite (1). Nendes olev nurk jõuvektori suuna ja x telje positiivse suuna vahel $\rho = 0^\circ$ ning projektsioonid võrduvad

$$F_{3x} = F_3 \cos \rho = F_3 \cos 0^\circ = F_3,$$

$$F_{3y} = F_3 \sin \rho = F_3 \sin 0^\circ = 0.$$

Jõud F_4 asub tasandi IV veerandis ja tema suund olgu määratud nurgaga μ , mille ta moodustab y teljega. Jõu projektsioonid telgedel leiame täisnurksest kolmnurgast PRS , milles x teljega paralleelne kaatet on võrdne projektsiooniga F_{4x} ja y teljega paralleelne kaatet võrdne projektsiooniga F_{4y} . Hüpotenuusiks on jõuvektori moodul F_4 . Nende projektsioonide pikkuste arvutamisel kasutame ära trigonomeetriliste funktsioonide definitsioone täisnurkses kolmnurgas

$$\sin \mu = \frac{F_{4x}}{F_4}; \cos \mu = \frac{F_{4y}}{F_4}.$$

Siit jõu F_4 projektsioonid koordinaattelgedel, arvestades ka projektsioonide märke, avalduvad kui

$$F_{4x} = -F_4 \sin \mu; F_{4y} = -F_4 \cos \mu.$$

Teise variandina jõu F_4 projektsioonide arvutamiseks kasutame nurka α , mille jõud moodustab x telje positiivse suunaga. Sel juhul võib projektsioonid arvutada valemitega (1)

$$F_{4x} = F_4 \cdot \cos \alpha,$$

$$F_{4y} = F_4 \cdot \sin \alpha.$$

Need projektsioonid on negatiivsed, kuna nurk α on III veerandi nurk ja nii siinus kui ka koosinus on selles veerandis negatiivsed (vt tabel 2.1).

Oleme saanud nelja jõu kahe projektsiooni pikkuste arvutamiseks kaks varianti, seega $4 \times 2 \times 2 = 16$ valemite.

Nii tuleks üliõpilasel toimida ka kodu- ja kontrolltöö ülesannete lahendamisel. Seejuures võib vabalt valida jõuvektori suuna määramiseks vajalikke nurki – kas x või y telje suhtes, kas telje positiivse või negatiivse suuna suhtes.

KODUÜLESANNE NR 2

Tasand on jaotatud koordinaattelgedega x ja y neljaks veerandiks (vt skeemi, mille annab õppejõud). Igas veerandis on antud üks jõuvektor. Leida nende jõuvektorite projektsioonid koordinaattelgedele. Vektorite suuna määramiseks kasutada nurki, mille nad moodustavad koordinaattelgedega. Kõikide vektorite projektsioonide pikkuste arvutamiseks anda kaks varianti. Niisiis on vaja leida nelja jõuvektori projektsioonid kahel koordinaatteljel igauhest kaks varianti, seega $4 \times 2 \times 2 = 16$ valemit jõuvektorite projektsioonide pikkuste arvutamiseks.

3. KEHA TASAKAAL

Keha on tasakaalus kui temale mõjuv jõuhulknurk on kinnine ehk jõusüsteemi peavektor F ja peamoment M võrduvad nulliga

$$F = 0, M = 0.$$

Sellest järelduvad skalaarsed tasakaalutingimused:

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0, \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0, \sum_{i=1}^n F_{iz} = 0,$$

$$\sum_{i=1}^m M_{ix}(F_i) = 0, \sum_{i=1}^m M_{iy}(F_i) = 0, \sum_{i=1}^m M_{iz}(F_i) = 0.$$

Tasapinnalise jõusüsteemi korral on skalaarseid tasakaalutingimusi kasutada vaid kolm.

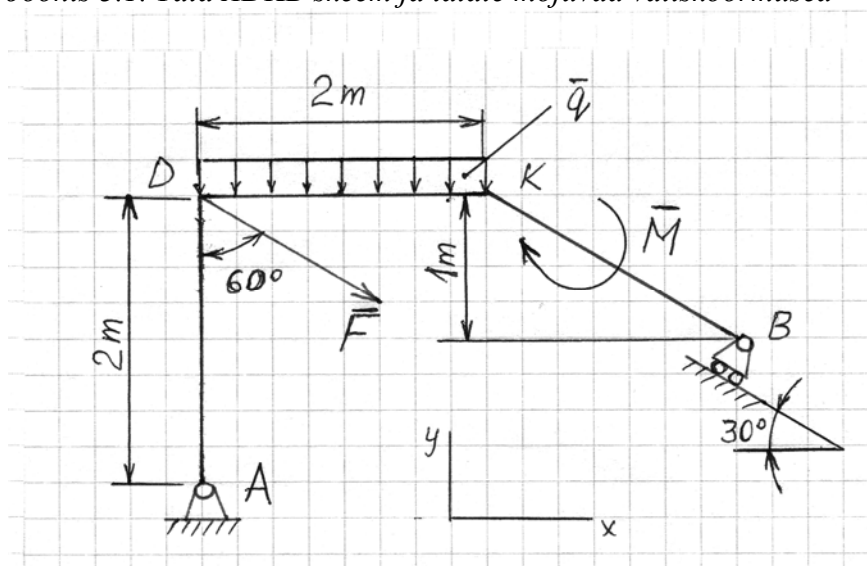
Näiteks need
$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0, \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0, \sum_{i=1}^m M_{iz}(F_i) = 0.$$

Esimesed kaks tingimust tähendavad, et tasakaalu korral on kõigi mõjuvate jõudude projektsioonide summa koordinaattelgedel x ja y null. Kolmas tingimus tähendab, et tasakaalu korral on kõigi mõjuvate jõudude momentide summa z telje suhtes null. Seejuures on z telg risti xy tasapinnaga, milles jõud mõjuvad, ja võib paikneda selle tasapinna suvalises punktis.

Ülesanne 3.1

Tala $ADKB$, mille mõõtmed on toodud joonisel 3.1, on koormatud koondatud jõuga mooduliga $F = 6$ kN, pöördemomendiga $M = 4$ kNm ja jaotatud koormusega, mille intensiivsus on $q = 1$ kN/m. Tala toetub kahele toele, millest üks on liikumatu liigendtugi A ja teine liikuv liigendtugi B . Leida jõud, mida tala avaldab tugedele ehk toereaktsioonid.

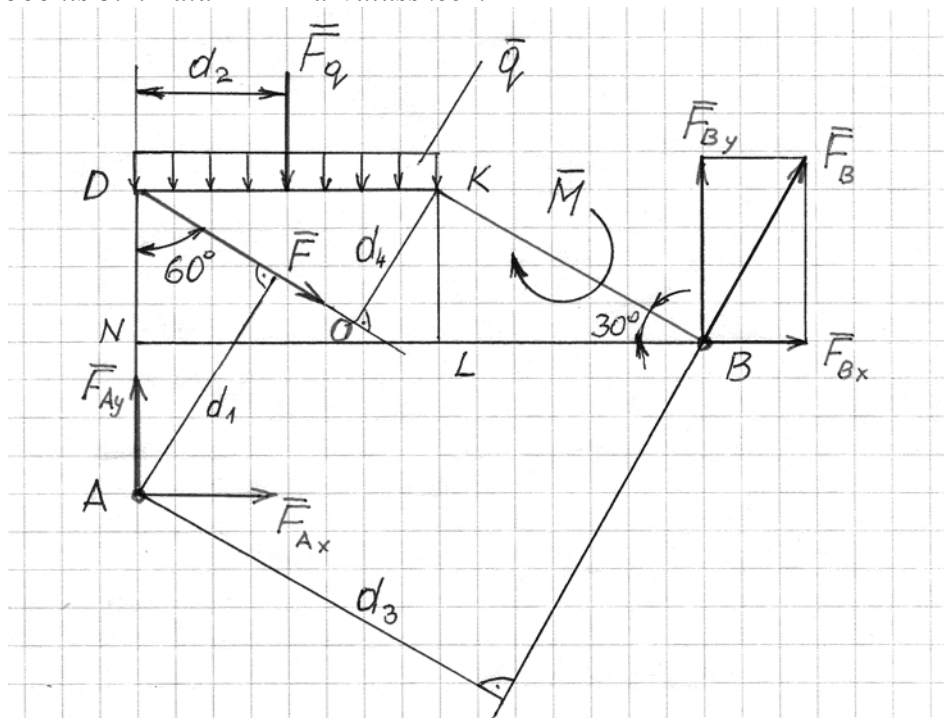
Joonis 3.1. Tala $ADKB$ skeem ja talale mõjuvad väliskoormused



Tala toereaktsioonid leiame tala tasakaalutingimustest. Nendes peavad olema arvesse võetud kõik talale mõjuvad jõud, sealhulgas ka toereaktsioonid. Millised need on?

Tugi A kui liikumatu liigendtugi ei luba tala otsal kuhugi liikuda. Öeldakse, et ta võtab vastu jõudu igas suunas. Ükskõik kuhu reaktsioon F_A (joonisel ei ole näidatud) ka suunatud ei oleks, ikka on teda võimalik lahutada kaheks komponendiks. Leides need komponendid ja liites nad geomeetriselt, võime saada toereaktsiooni F_A . Praktiliselt puudub selleks vajadus ja nii piirduetaksegi vaid reaktsiooni komponentide väärtuste leidmisega. Valides koordinaatteljed nii nagu joonisel 3.1 näidatud, võime otsitava reaktsiooni lahutada kaheks koordinaattelgede suunaliseks komponendiks F_{Ax} ja F_{Ay} (vt joonis 3.2).

Joonis 3.2. Tala $ADKB$ arvutusskeem



Tugi B kui liikuv liigendtugi lubab talal liikuda piki tugipinda, kuid ei luba liikuda tugipinnaga ristisuunas, st võtab vastu jõudu ühes suunas. Seetõttu on võimalik vaid toereaktsioon F_B (vt joonis 3.2).

Niisiis on otsitavaid toereaktsioone kolm. Et tegemist on tasapinnalise ülesandega, siis on meil ülesande lahendamiseks kasutada kolm skalaarset tasakaaluvõrrandit ja ülesanne staatikaga määratud.

Koostame tasakaaluvõrrandid. Projekteerime kõik mõjuvad jõud koordinaattelgedele x ja y ning koostame momentide võrrandi punkti A suhtes.

$$\begin{aligned}\sum F_x &= F_{Ax} + F \cdot \sin 60^\circ + F_B \cdot \sin 30^\circ = 0, \\ \sum F_y &= F_{Ay} - F \cdot \cos 60^\circ - F_q + F_B \cdot \cos 30^\circ = 0, \\ \sum M_A &= -F \cdot d_1 - F_q \cdot d_2 - M + F_B \cdot d_3 = 0.\end{aligned}$$

Nendes võrrandites on F_q jaotatud koormuse resultant, mille väärtus on

$$F_q = q \cdot 2 = 1 \cdot 2 = 2 \text{ kN}.$$

Momentide võrrandis esinevad jõudude õlad d_1 , d_2 ja d_3 , mis on jõudude mõjusirgete kaugused punktist A , määrame joonisel 3.2 esitatud konstruktsioonide abil. Täisnurkses kolmnurgas CAD on jõu F õlaks punkti A suhtes kaatet CA , mille pikkuse d_1 leiame nii

$$\sin 60^\circ = \frac{CA}{AD} = \frac{d_1}{2}, \quad d_1 = 2 \sin 60^\circ = 2 \cdot 0,866 = 1,73 \text{ m}.$$

Jaotatud koormuse q õlg punkti A suhtes $d_2 = 1$ m. Kuna koormus on ühtlaselt jaotatud, siis võib lugeda tema resultandi F_q rakendatuks koormuse keskkohas e raskuskeskmes.

Toereaktsiooni F_B õla pikkust punkti A suhtes d_3 on geomeetrilise konstruktsiooni abil tülikas arvutada. Hõlpsam on jõu F_B poolt arendatav moment leida nii, et lahutame ta kaheks koordinaattelgede sihiliseks komponendiks F_{Bx} ja F_{By} , mis asendavad jõudu F_B . Nende komponentide õlgade pikkusi ehk mõjusirgete kaugusi punktist A on hõlpsam arvutada.

Komponendi F_{Bx} õlg punkti A suhtes, nagu jooniselt 3.2 näha, on $d_{3x} = 1$ m. Teise komponendi F_{By} õla pikkus d_{3y} on arvutatav kui lõikude $NL = DK = 2$ m ja LB summa. Lõigu LB pikkuse leiame täisnurksest kolmnurgast BLK

$$\tan 30^\circ = \frac{KL}{BL}, BL = \frac{KL}{\tan 30^\circ} = \frac{1}{0,5774} = 1,73 \text{ m.}$$

Õla pikkus on seega $d_{3y} = NL + LB = 2 + 1,73 = 3,73$ m.

Kirjutame nüüd momentide võrrandi uuel kujul asendades jõu F_B tema komponentidega

$$\sum M_A = -F \cdot d_1 - F_q \cdot d_2 - M - F_{Bx} \cdot d_{3x} + F_{By} \cdot d_{3y} = 0.$$

Komponentjõudude moodulid F_{Bx} ja F_{By} on arvutatavad täisnurksest kolmnurgast BST

$$\sin 30^\circ = \frac{BS}{BT} = \frac{F_{Bx}}{F_B}, F_{Bx} = F_B \cdot \sin 30^\circ = 0,5 F_B;$$

$$\cos 30^\circ = \frac{ST}{BT} = \frac{F_{By}}{F_B}, F_{By} = F_B \cdot \cos 30^\circ = 0,87 F_B.$$

Paneme momentide võrrandisse lähteandmed ja vahepealsed arvutustulemused

$$\sum M_A = -6 \cdot 1,73 - 2 \cdot 1 - 4 - 0,5 F_B \cdot 1 + 0,87 F_B \cdot 3,73 = 0$$

ja avaldame sellest võrrandist jõu F_B

$$F_B = \frac{6 \cdot 1,73 + 2 + 4}{-0,5 + 0,87 \cdot 3,73} = \frac{16,38}{2,73} = 5,96 \text{ kN.}$$

Nüüd on võimalik leida esimesest tasakaaluvõrrandist toereaktsioon F_{Ax} ja teisest toereaktsioon F_{Ay}

$$F_{Ax} = -F \cdot \sin 60^\circ - F_B \cdot \sin 30^\circ = -6 \cdot 0,87 - 5,96 \cdot 0,5 = -8,2 \text{ kN,}$$

$$F_{Ay} = F \cdot \cos 60^\circ + F_q - F_B \cdot \cos 30^\circ = 6 \cdot 0,5 + 2 - 5,96 \cdot 0,87 = -0,19 \text{ kN.}$$

Toereaktsioonid on leitud ja ülesanne seega lahendatud.

Kas aga lahendus õige on? Sellele küsimusele vastuse saamiseks teeme kontrollarvutuse. Selleks koostame veelkord momentide võrrandi, kuid mõne teise punkti (mitte A) suhtes. Pannes sellesse leitud toereaktsioonide väärtused, peab võrrand olema rahuldatud. Seda muidugi juhul kui toereaktsioonid on õiged.

Kirjutame momentide võrrandi näiteks punkti K suhtes. Seda punkti ei läbi ühegi toereaktsiooni mõjusirge ja seega annavad nad kõik momendi punkti K suhtes.

Võrrandi kirjutamisel on jõu F õlg punkti K suhtes d_4 leitav täisnurksest kolmnurgast DOK . Nagu jooniselt 3.2 näha on nurga ODK väärtus 30° ja järelikult

$$\sin 30^\circ = \frac{KO}{DK} = \frac{d_4}{2}, d_4 = 2 \cdot 0,5 = 1.$$

$$\begin{aligned} \sum M_K &= F_{Ax} \cdot AD - F_{Ay} \cdot DK + F \cdot d_4 + F_q \cdot \frac{DK}{2} - M + F_B \cdot KB = \\ &= -8,2 \cdot 2 + 0,19 \cdot 2 + 6 \cdot 1 + 2 \cdot 1 - 4 + 5,96 \cdot 2 = -20,4 + 20,3 = -0,1 \approx 0. \end{aligned}$$

Võrrandi võib lugeda rahuldatuks. Et trigonomeetriliste funktsioonide väärtusi võtsime täpsusega kaks kohta pärast koma, siis on tulemus ümardamisest tingitud vea piires. Seega on toereaktsioonid leitud õigesti.

Kontrolliks oleks sobinud ka momentide võrrand punkti B suhtes. Et jõu F mõjusirge on paralleelne varda osaga KB , siis on jõu õlg punkti B suhtes sama, mis punkti K suhtes $-d_4$.

$$\begin{aligned}\sum M_B &= F_{Ax} \cdot AN - F_{Ay} \cdot NB + F \cdot d_4 + F_q \cdot \left(LB + \frac{DK}{2} \right) - M = \\ &= -8,2 \cdot 1 + 0,19 \cdot 3,73 + 6 \cdot 1 + 2 \cdot 2,73 - 4 = 12,17 - 12,2 = -0,03 \approx 0.\end{aligned}$$

KODUÜLESANNE NR 3

Leida skeemil (skeemi annab õppejõud) toodud tala või raami poolt tugelede avaldatavad jõud e toereaktsioonid. Saadud tulemust kontrollida.

4. SÕRESTIK

Sõrestikuks nimetatakse jäika konstruktsiooni kergetest varrastest, mis on otstest ühendatud. Varraste ühenduskohti nimetatakse *sõlmedeks*. Vardad on kerged selles mõttes, et nende omakaal on väike võrreldes mõjuvate koormustega ja seetõttu seda ei arvestata. Koormused on rakendatud sõlmedes. Sõrestike vardad võivad olla üksteise suhtes väga erinevate asenditega. Sõrestiku ülemised vardad moodustavad *ülemise vöö*, alumised vardad – *alumise vöö*. Vöödevahelised vardad moodustavad *sõrestikuvõrgu*. Võrgu vertikaalseid vardaid nimetatakse *postideks* ja kaldvardaid *diagonaalideks*. Horisontaalse vöö kahe naabersõlme vahekaugust nimetatakse *paneeli pikkuseks*.

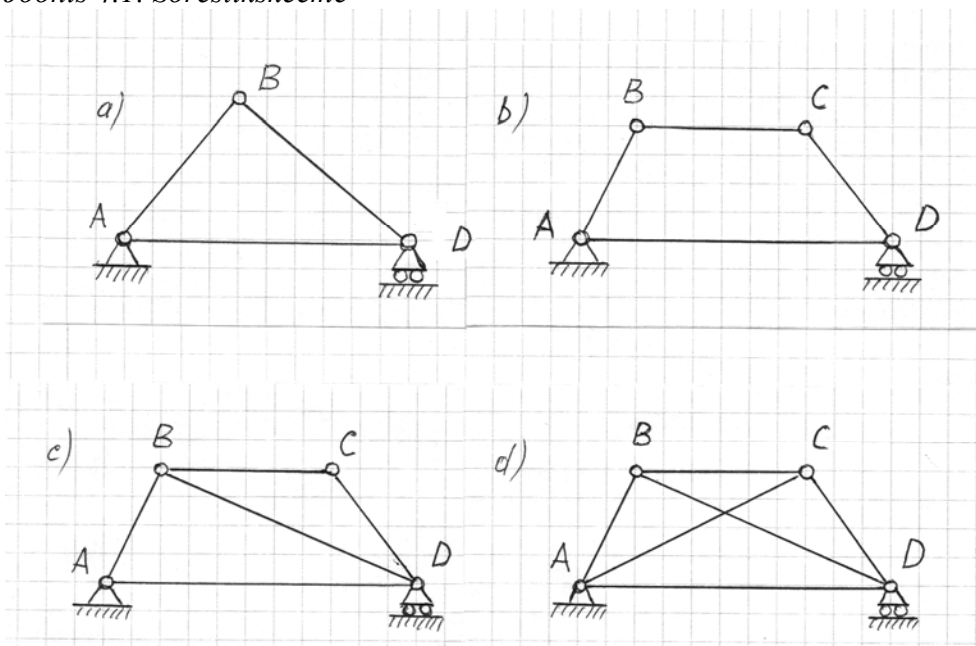
Sõrestikke liigitatakse mitmete tunnuste alusel:

- ülesande järgi – katuse-, silla-, kraana- jne sõrestikud;
- toereaktsioonide järgi – tala-, konsool-, konsoolidega tala, kaar-, raam-, ripp-, kombineeritud sõrestikud;
- kuju järgi – paralleelvöödega, kolmnurk-, kõvera vööga sõrestikud;
- võrgu järgi – diagonaalvõrguga, post-diagonaalvõrguga sõrestikud.

Järgnevalt vaatleme sõrestikke, mille kõik vardad on sirged, paiknevad ühes tasapinnas ja töötavad pikkele. Sellised vardad moodustavad *sõrestikskeemi*.

Kolmest vardast koosnev varraskonstruktsioon ABD (joonis 4.1 *a*) on jäik olenemata sellest kas vardad on ühendatud liigenditega, poltliidetega, keevisliidetega või muul moel. Kolmnurka seatud kolm varrast on sõrestike baaselemendiks. Lisades sellele uusi vardaid, nii et tekiksid järjest uued kolmnurgad, võib moodustada keerulisemaid varraskonstruktsioone.

Joonis 4.1. Sõrestikskeeme



Neljast vardast koosnev varraskonstruksioon $ABCD$ (joonis 4.1 b) ei ole jäik kui vardad on ühendatud liigenditega. Tema kuju võib mõjuva jõu toimel muutuda. Tegemist on varbmehhanismiga.

Tema muutmiseks jäigaks varraskonstruksiooniks tuleb lisada üks diagonaalvarras (joonis 4.1 c). Nii moodustuvad skeemis kaks kolmnurka ABD ja BCD , mis on jäigad sõrestike baaslemendid.

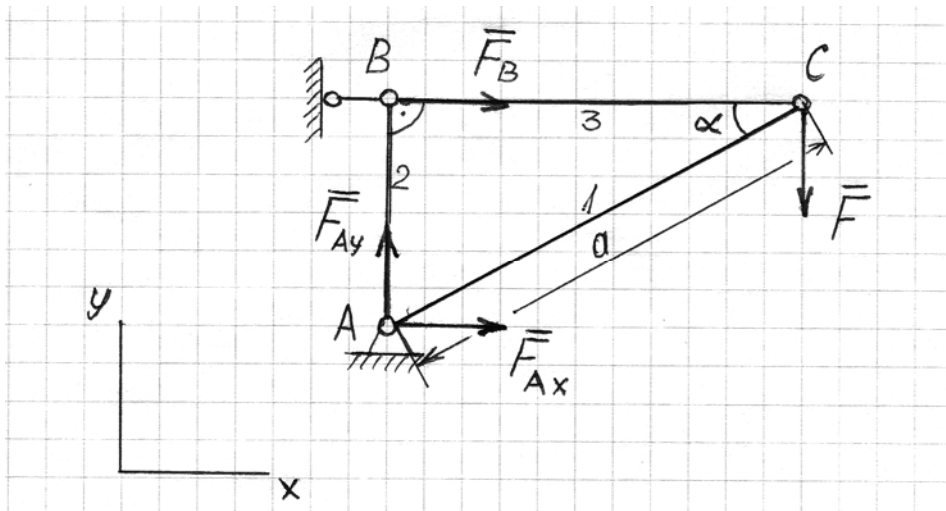
Kui lisada kaks diagonaalvarrast (joonis 4.1 d) saame varraskonstruksiooni, mis on ülejääk ja staatiliselt määramatu.

Sõrestikud toetatakse tavaliselt kahele liigendtoele, millest üks on liikumatu (tugi A , joonised 4.1 a kuni d) ja teine liikuv (tugi D , joonised 4.1 a kuni d). Ühe liikumatu liigendtoe ümber võib sõrestik pöörduda. Selle vältimiseks lisatakse teine tugi. Selline toetuskeem on kasutusel ka paljude talade puhul.

Ülesanne 4.1

Sõrestikule sõlmedega A , B ja C , mis koosneb kolmest kergest vardast (joonis 4.2), mõjub jõud F , mille väärtus on teada. Vardad 2 ja 3 on täisnurga all. Varraste 1 ja 3 vaheline nurk on teada ja võrdne α -ga. Varda 1 pikkus on samuti teada ja võrdne a meetriga.

Joonis 4.2. Kolmest vardast koosnev sõrestik



Lahendamist vajavad probleemid:

1. Leida toereaktsioonid
2. Leida varrastes mõjuvad jõud
3. Millised vardad on tõmmatud, millised surutud ja millised ülearused?
4. Millises vardas on jõud suurim?

Et ülesande lähteandmed on antud üldkujul (puuduvad konkreetset numbrilised arväärtused), siis saavad ka vastuseks olla vaid üldkujulised valemid probleemide lahendamiseks. Sellisel kujul ülesande püstitamisel ja lahendamisel on see eelis, et saadud valemid kehtivad kõigi antud kujuga sõrestikskeemide puhul olenemata varraste mõõtmetest. Nende abil võib arvutada jõudude konkreetset arvulised väärtused, kui lähteandmed F , a ja α ette anda numbrilisel kujul.

Sõrestik on toetatud kahele toele – liikumatule liigendtoele A ja kergele tugivardale B . Viimane ei ole sõrestiku osa, vaid ainult näitab ära toereaktsiooni F_B sihi. Arvestades tuge tüüpe, on joonisele kantud võimalikud toereaktsioonid F_{Ax} , F_{Ay} ja F_B . Oletatud on koordinaattelgede positiivsete suundadega ühtivaid reaktsioonide suundi. Tasakaaluvõrrandite lahendamisel saame positiivsed väärtused nendele toereaktsioonidele, mille tegelik suund langeb kokku oletatuga. Saadud negatiivsed väärtused näitavad, et nende toereaktsioonide tegelikud suunad on oletatule vastupidised.

Enne ülesande lahendamisele asumist leiame ülejäänud sõrestiku varraste pikkused. Täisnurksest kolmnurgast ABC , mille moodustavad sõrestiku vardad, on antud hüpotenuusi AC ehk varda 1 pikkus, mis võrdne a meetriga. Varras 2, kui täisnurkse kolmnurga üks kaatetest on arvutatav nii $AB = a \sin \alpha$. Teine kaatet, milleks on varras 3, avaldub kui $BC = a \cos \alpha$.

Ülesande lahendamiseks leiame kõigepealt sõrestikule mõjuvad toereaktsioonid. Selleks vaatleme kogu sõrestiku tasakaalu ja kirjutame välja tasakaaluvõrrandid sõrestiku, kui terviku kohta

$$\begin{aligned}\sum F_x &= F_{Ax} + F_B \cdot \sin \alpha = 0, \\ \sum F_y &= F_{Ay} - F_B \cdot \cos \alpha - F = 0, \\ \sum M_A &= -F_B \cdot a \cdot \sin^2 \alpha - F \cdot a \cdot \cos \alpha = 0.\end{aligned}$$

Kolmandast võrrandist saab kõigepealt leida reaktsiooni F_B , seejärel esimesest võrrandist reaktsiooni F_{Ax} ja teisest reaktsiooni F_{Ay} . Toereaktsioonide väärtused on

$$\begin{aligned}F_B &= -\frac{F \cdot \cos \alpha}{\sin^2 \alpha}, \\ F_{Ax} &= \frac{F \cdot \cos \alpha}{\sin \alpha} = \cot \alpha, \\ F_{Ay} &= F \cdot \left(1 - \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} \right) = F \cdot (1 - \cot^2 \alpha).\end{aligned}\tag{2}$$

Miinusmärk reaktsiooni F_B ees viitab sellele, et tema tegelik suund on vastupidine joonisel 4.2 näidatule.

Enne ülesande lahendamise jätkamist kontrollime leitud toereaktsioonide väärtuste õigsust. Selleks kirjutame veelkord välja kogu sõrestiku tasakaaluvõrrandi, näiteks momentide võrrandi sõlme C suhtes

$$\sum M_C = F_{Ax} \cdot a \cdot \sin \alpha - F_{Ay} \cdot a \cdot \cos \alpha + F_B \cdot a \cdot \cos^2 \alpha = 0.$$

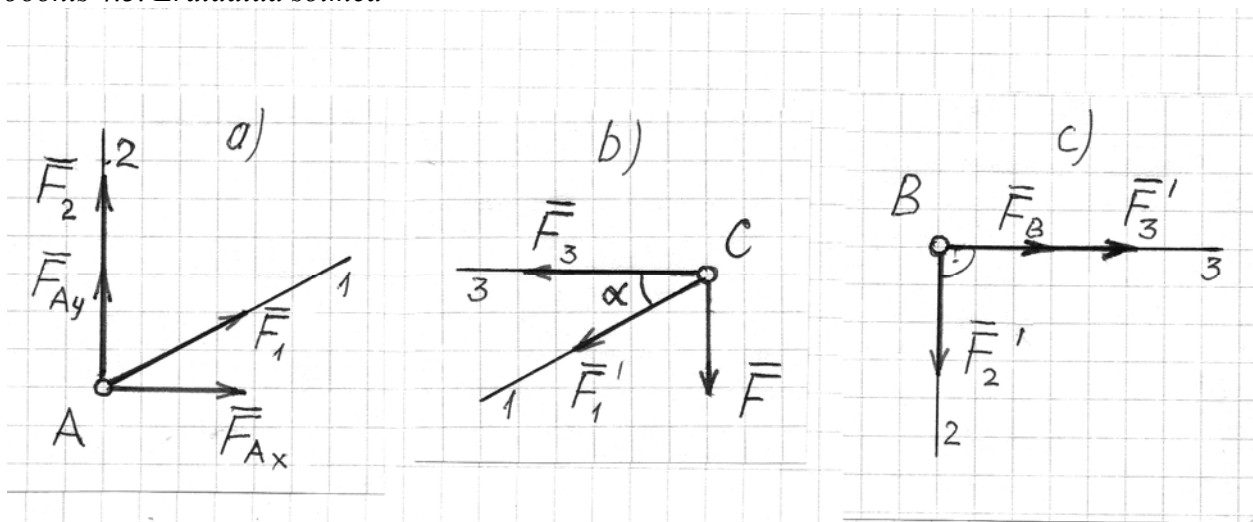
See võrrand peab olema rahuldatud kui leitud toereaktsioonide väärtused on õiged. Paneme need võrrandisse

$$\begin{aligned}\sum M_c &= \frac{F \cdot \cos \alpha}{\sin \alpha} \cdot a \cdot \sin \alpha - F \cdot \left(1 - \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha}\right) \cdot a \cdot \cos \alpha + F \cdot \left(-\frac{\cos \alpha}{\sin^2 \alpha}\right) \cdot a \cdot \cos^2 \alpha = \\ &= F \cdot a \cdot \cos \alpha - F \cdot a \cdot \cos \alpha + F \cdot \frac{a \cdot \cos^3 \alpha}{\sin^2 \alpha} - F \cdot \frac{a \cdot \cos^3 \alpha}{\sin^2 \alpha} = 0.\end{aligned}$$

Saadud tulemusest järeldub, et toereaktsioonide väärtused (2) on tõesed. Nüüd võib asuda ülesande lahendamise teise etapi juurde.

Sõrestiku varrastes mõjuvad jõud leiame sõlmede eraldamise meetodil. Selle meetodi rakendamisel eeldatakse, et kui kogu sõrestik on tasakaalus temale mõjuvate koormuste ja toereaktsioonide toimel, siis peavad olema tasakaalus ka kõik sõrestiku sõlmed. Selleks vaadeldakse üksikhaaval iga sõlme tasakaalu. Sõlmede vaatlemise järjekord on vabalt valitav. Oluline on, et vaadeldavas sõlmes ei oleks ühendatud üle kahe tundmatu jõuga varda.

Joonis 4.3. Eraldatud sõlmed



Vaatleme sõlme A tasakaalu.

Sõlmes on ühendatud vardad 1 ja 2 ning seal on rakendatud ka toereaktsioonid F_{Ax} ja F_{Ay} . (joonis 4.3 a). Varrastes mõjuvate jõudude F_1 ja F_2 suunad pole algul teada. Eeldame, et kõik vardad on tõmmatud, st vardad tõmbavad mõlemas otsas olevaid sõlmi. Seega suuname jõud F_1 ja F_2 sõlmest eemale. Kui varras tegelikult on surutud, st varras surub mõlemas otsas olevaid sõlmi, siis saame sellele jõule tasakaaluvõrrandite lahendamisel negatiivse väärtuse. Jõudude sellise märkimise korral saame tõmmatud varrastes mõjuvatele jõududele positiivsed väärtused ja surutud varrastes mõjuvatele jõududele negatiivsed väärtused.

Kirjutame välja sõlme A tasakaaluvõrrandid

$$\begin{aligned}\sum F_x &= F_{Ax} + F_1 \cdot \cos \alpha = 0, \\ \sum F_y &= F_{Ay} + F_1 \cdot \sin \alpha + F_2 = 0.\end{aligned}$$

Esimesest võrrandist leiame jõu esimeses vardas F_1

$$F_1 = -\frac{F_{Ax}}{\cos \alpha} = -\frac{F \cdot \cos \alpha}{\sin \alpha \cdot \cos \alpha} = -\frac{F}{\sin \alpha}.$$

Pannes leitud väärtuse teise võrrandisse, leiame jõu teises vardas F_2

$$F_2 = -F_{Ay} - F_1 \cdot \sin \alpha = -F + \frac{F \cdot \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} + \frac{F}{\sin \alpha} \cdot \sin \alpha = \frac{F \cdot \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = F \cdot \cot^2 \alpha.$$

Vaatleme järgnevalt sõlme C tasakaalu.

Sõlmes on ühendatud vardad 1 ja 3 ning sinna on rakendatud väliskoormus F . Samuti nagu eelmises vaadeldud sõlmes eeldame, et jõud F_1 ja F_3 mõjuvad sõlmest C eemale (joonis 4.3 *b*). Et eelmise sõlme tasakaalu uurimisel oletasime jõudu vardas 1 vastassuunas, siis muudame nüüd jõu tähistust lisades korrektsuse huvides jõu tähisele ülakoma $-F_1$.

Koostame tasakaaluvõrrandid

$$\begin{aligned}\sum F_x &= -F_3 - F_1 \cdot \cos \alpha = 0, \\ \sum F_y &= -F - F_1 \cdot \sin \alpha = 0.\end{aligned}\quad (3)$$

Esimesest võrrandist leiame jõu vardas 3

$$F_3 = -F_1 \cdot \cos \alpha = \frac{F}{\sin \alpha} \cdot \cos \alpha = F \cdot \cot \alpha.$$

Oleme leidnud jõud kõikides varrastes. Seejuures ei ole me kasutanud ühte võrranditest (3) ega ole meil vaja olnud vaadelda sõlme B tasakaalu. Veendumaks, et jõud varrastes on õigesti leitud, paneme leitud väärtused võrranditesse ja kontrollime, kas need on rahuldatud. Pannes näiteks võrrandisse (3) jõu F_1 väärtuse, saame

$$\sum F_y = -F + \frac{F}{\sin \alpha} \cdot \sin \alpha = -F + F = 0.$$

Võrrand on rahuldatud, mis näitab, et jõud esimeses vardas on õigesti leitud.

Kirjutame kontrolliks ka sõlme B (joonis 4.3 *c*) kohta tasakaaluvõrrandid. Paneme nendesse võrranditesse varrastes 2 ja 3 mõjuvate jõudude F_2 ja F_3 leitud väärtused. Kui võrrandid on rahuldatud, on tulemused õiged.

Sõlme B tasakaaluvõrrandid

$$\begin{aligned}\sum F_x &= F_3 + F_B \cdot \sin \alpha = 0, \\ \sum F_y &= -F_2 - F_B \cdot \cos \alpha = 0.\end{aligned}$$

Paneme võrranditesse leitud toereaktsiooni F_B ja varrastes mõjuvate jõudude F_2 ja F_3 väärtused.

$$\begin{aligned}\sum F_x &= F \cdot \cot \alpha - \frac{F \cdot \cos \alpha}{\sin^2 \alpha} \cdot \sin \alpha = \frac{F \cdot \cos \alpha}{\sin \alpha} - \frac{F \cdot \cos \alpha}{\sin \alpha} = 0, \\ \sum F_y &= -F \cdot \cot^2 \alpha + \frac{F \cdot \cos \alpha}{\sin^2 \alpha} \cdot \cos \alpha = -F \cdot \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} + F \cdot \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = 0.\end{aligned}$$

Et võrrandid on rahuldatud, siis on jõud varrastes õigesti leitud.

Esitame saadud tulemused tabeli kujul.

F_{Ax}	F_{Ay}	F_B	F_1	F_2	F_3
$F \cot \alpha$	$F(1 - \cot^2 \alpha)$	$-F \frac{\cos \alpha}{\sin^2 \alpha}$	$-\frac{F}{\sin \alpha}$	$F \cot^2 \alpha$	$F \cot \alpha$

Vastus kolmandale ülesandes püstitatud küsimusele selgub tabelist, kus on näha, et jõud on positiivsed varrastes 2 ja 3 ning negatiivne vardas 1. See tähendab, et varras 1 on surutud, vardad 2 ja 3 aga tõmmatud.

Vastuse neljandale küsimusele, millises vardas on jõud kõige suurem, saame analüüsides valemeid jõudude F_1 , F_2 ja F_3 arvutamiseks. Määravaks on trigonomeetriliste funktsioonide \sin ja \cot

väärtused nurga α mitmesuguste väärtuste puhul. Väikeste nurga α väärtuste korral ($\leq 38^\circ$) on enamkoormatud varras 2. Suuremate nurga α väärtuste korral osutub enamkoormatuks varras 1.

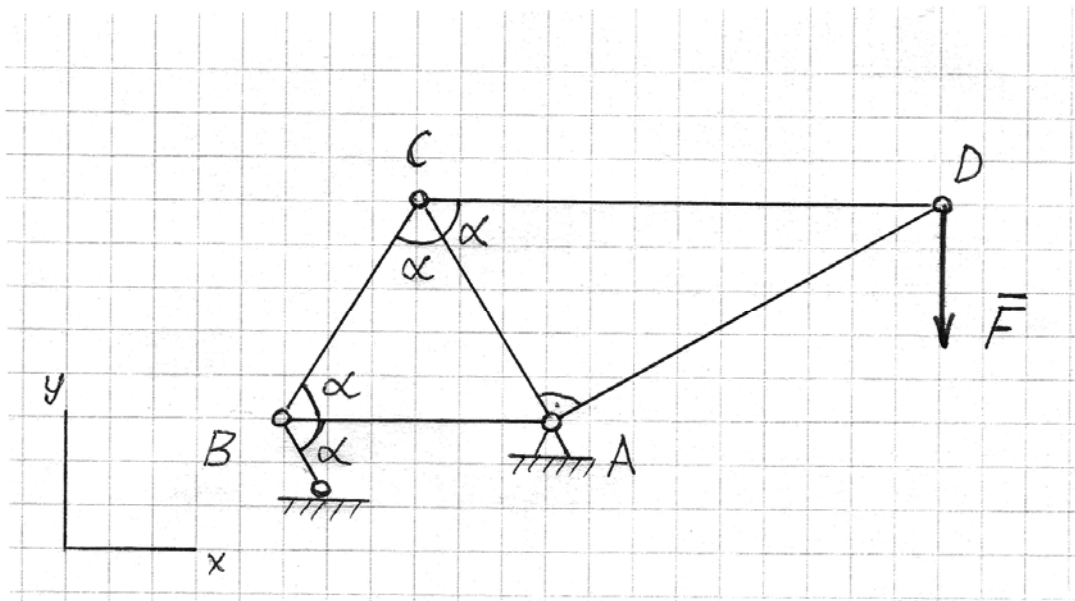
Ülesanne 4.2

Viie vardast koosnev sõrestik sõlmedega A , B , C ja D (joonis 4.4) on koormatud jõuga F , mille väärtus on teada. Vardad 2, 3 ja 5 (joonis 4.5) on võrdse pikkusega a meetrit. Varraste 1 ja 5 vahel on täisnurk.

Nurga α väärtus on 60° , sest kolmnurk ABC on võrdkülgne.

Täisnurkses kolmnurgas CAD on sõlme D juures olev nurk 30° . Seda võib lihtsalt arvutada. Et kolmnurga sisenukkade summa on 180° ja kahe nurga väärtused teada - 60° ja 90° , siis saamegi arvutades $180^\circ - (60^\circ + 90^\circ) = 30^\circ$ sellise tulemuse.

Joonis 4.4. Viie vardast koosneva sõrestiku skeem



Lahendamist vajavad probleemid:

1. Leida toereaktsioonid
2. Leida varrastes mõjuvad jõud
3. Millised vardad on tõmmatud, millised surutud ja millised üleaarused?
4. Millises vardas on jõud suurim?

Leiame sõrestiku varraste 1 ja 4 pikkused. Täisnurksest kolmnurgast CAD saame leida varda 4 kui hüpotenuusi CD pikkuse

$$\sin 30^\circ = \frac{AC}{CD} = \frac{a}{CD} = \frac{1}{2},$$

$$CD = 2a.$$

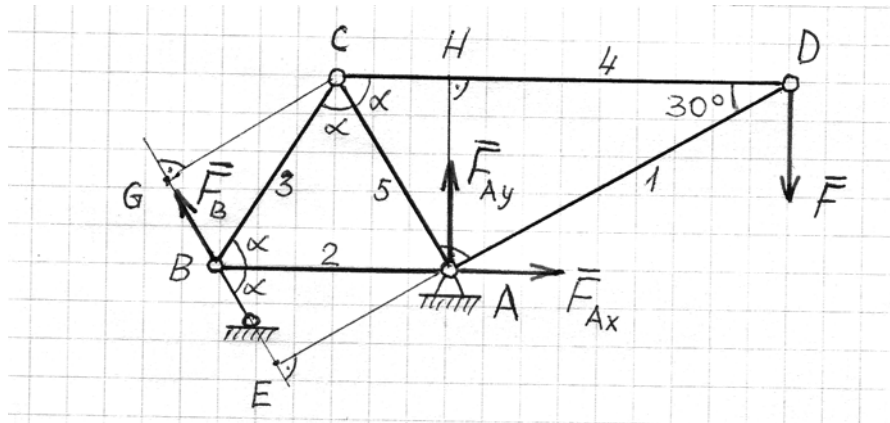
Samast kolmnurgast leiame ka varda 1 kui kaateti AD pikkuse

$$\cos 30^\circ = \frac{AD}{CD} = \frac{AD}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$AD = a\sqrt{3}.$$

Leiame sõrestiku poolt tugedele avaldatavad jõud – toereaktsioonid. Arvestades tugede tüüpi on need joonisel 4.5 tähistatud kui F_{Ax} , F_{Ay} ja F_B .

Joonis 4.5. Sõrestiku arvutuskeem



Kirjutame välja sõrestiku kui terviku tasakaalutingimused

$$\sum X = F_{Ax} - F_B \cdot \cos 60^\circ,$$

$$\sum Y = F_{Ay} + F_B \cdot \sin 60^\circ,$$

$$\sum M_A = -F_B \cdot AE - F \cdot HD.$$

Kolmandast võrrandist on võimalik leida toereaktsiooni F_B väärtus. Selleks arvutame jõudude õlgade AE ja HD väärtused. Täisnurkses kolmnurgas AEB (joonis 4.5) on teada hüpotenuusi pikkus $AB = a$. Kaateti AE pikkuse arvutame nii

$$\sin 60^\circ = \frac{AE}{AB} = \frac{AE}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$AE = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Õla HD pikkuse leidmiseks vaatleme täisnurkset kolmnurka AHD . Selles kolmnurgas on teada hüpotenuusi AD pikkus, mille leidsime eespool $AD = a\sqrt{3}$. Kaateti HD pikkuse leidmiseks arvutame nii

$$\cos 30^\circ = \frac{HD}{AD} = \frac{HD}{a\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$HD = \frac{3}{2}a = 1,5a.$$

Nüüd avaldame tasakaaluvõrrandist

$$F_B = -\frac{F \cdot HD}{AE} = -\frac{F \cdot 3a \cdot 2}{2 \cdot a\sqrt{3}} = -F\sqrt{3}.$$

Tasakaaluvõrranditest leiame nüüd ka ülejäänud toereaktsioonide väärtused

$$F_{Ax} = F_B \cdot \cos 60^\circ = -F\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}F,$$

$$F_{Ay} = F - F_B \cdot \sin 60^\circ = F + F\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = F\left(1 + \frac{3}{2}\right) = 2,5F.$$

Kontrollime leitud toereaktsioonide väärtuste õigsust. Selleks kirjutame veel ühe tasakaaluvõrrandi, näiteks momentide võrrandi sõlme C suhtes. See võrrand peab olema rahuldatud kui panna sinna leitud toereaktsioonide väärtused.

$$\sum M_C = -F_B \cdot CG - F \cdot CD + F_{Ay} \cdot AH.$$

Võrrandis olevatest jõudude õlgadest leidsime varem $CD = 2a$. Õlg CG on ilmselt võrdne varem leitud lõigu AE -ga, sest $AC \parallel BE$ ja seega ka $CG \parallel AE$. Õla CH pikkuse saame arvutada nii

$$CH = CD - HD = 2a - 1,5a = 0,5a.$$

Õla AH pikkuse leiame juba varem vaadeldud täisnurksest kolmnurgast AHD

$$\sin 30^\circ = \frac{AH}{AD} = \frac{AH}{a\sqrt{3}} = \frac{1}{2},$$

$$AH = a \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Paneme leitud toereaktsioonide ja õlgade väärtused tasakaaluvõrrandisse

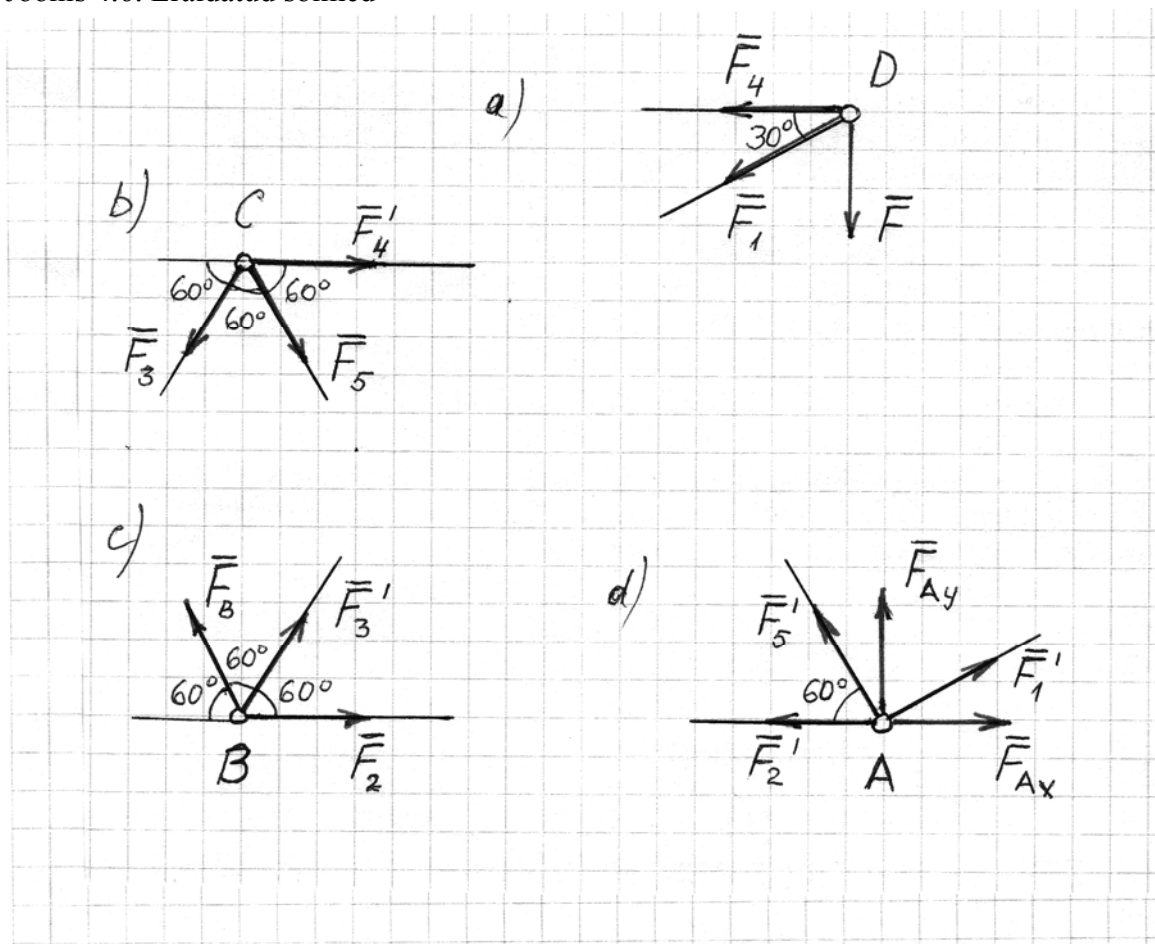
$$\sum M_C = F\sqrt{3} \cdot a \frac{\sqrt{3}}{2} - F \cdot 2a + 2,5F \cdot 0,5a - \frac{\sqrt{3}}{2} F \cdot a \frac{\sqrt{3}}{2} = Fa \left(\frac{3}{2} - 2 + 1,25 - \frac{3}{4} \right) = 0.$$

Et võrrand on rahuldatud, siis on toereaktsioonid õigesti leitud.

Nüüd võime alustada varrastes mõjuvate jõudude arvutamist uurides üksikute sõlmede tasakaalu. Millisest sõlmest alustada? Sobivad need sõlmed, kus on ühendatud kaks varrast. Seega sõlmed D või B . Mõlemas sõlmes mõjuvad kaks tundmatut jõudu varrastes ja mõlema kohta saab kirjutada kaks tasakaaluvõrrandit, millest on võimalik nende jõudude väärtused leida.

Sõlmedes A ja C on ühendatud kolm varrast ja nendes mõjuvad järelikult kolm tundmatut jõudu varrastes. Paraku saab nendegi sõlmede kohta kirjutada vaid kaks tasakaaluvõrrandit, millest kolme tundmatut leida ei saa.

Joonis 4.6. Eraldatud sõlmed



Alustame sõlme D tasakaalu vaatlemisest. Sõlmes on ühendatud vardad 1 ja 4 ning seal mõjub väliskoormus F (joonis 4.6 a). Oletame, et varrastes mõjuvad jõud F_1 ja F_4 on suunatud sõlmest eemale. Kirjutame sõlme tasakaaluvõrrandid

$$\sum X = -F_4 - F_1 \cdot \cos 30^\circ = 0,$$

$$\sum Y = -F - F_1 \cdot \sin 30^\circ = 0.$$

Teisest võrrandist saab kohe leida jõu vardas 1 ja seejärel esimesest võrrandist jõu vardas 4

$$F_1 = -\frac{F}{\sin 30^\circ} = -2F,$$

$$F_4 = -F_1 \cdot \cos 30^\circ = 2F \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = F\sqrt{3}.$$

Et jõud kahes vardas on leitud, siis võime järgnevalt uurida suvalise sõlme tasakaalu.

Vaatleme näiteks sõlme C tasakaalu. Siin on ühendatud kolm varrast – 3, 4 ja 5 (joonis 4.6 b).

Oletame jällegi, et jõud varrastes mõjuvad sõlmest eemale. Et eelmise sõlme tasakaalu uurides oletasime jõudu vardas 4 vastassuunas, siis lisame korrektsuse huvides nüüd selle jõu tähisesse ülakoma – F_4' .

Kirjutame sõlme C tasakaaluvõrrandid

$$\sum X = F_4' + F_5 \cdot \cos 60^\circ - F_3 \cdot \cos 60^\circ = 0,$$

$$\sum Y = -F_5 \cdot \sin 60^\circ - F_3 \cdot \sin 60^\circ = 0.$$

Teisest võrrandist saame $F_3 = -F_5$. Paneme selle tulemuse esimesse võrrandisse ja avaldame sealt jõu vardas 5

$$F_4' + F_5 \cdot \cos 60^\circ + F_5 \cdot \cos 60^\circ = 0,$$

$$F\sqrt{3} + 2F_5 \cdot \frac{1}{2} = 0,$$

$$F_5 = -F\sqrt{3},$$

$$F_3 = F\sqrt{3}.$$

Vaatleme sõlme B tasakaalu (joonis 4.6 c), kus on ühendatud vardad 2 ja 3 ning kus mõjub toereaktsioon F_B .

Oletame, et varrastes mõjuvad jõud on suunatud sõlmest eemale. Seejuures jõud vardas 3 on seekord varemoletatule vastupidine, mistõttu lisame tema tähisesse ülakoma.

Kirjutame sõlme B tasakaaluvõrrandid

$$\sum X = F_2 + F_3' \cdot \cos 60^\circ - F_B \cdot \cos 60^\circ = 0,$$

$$\sum Y = F_B \cdot \sin 60^\circ + F_3' \cdot \sin 60^\circ = 0.$$

Jõu vardas 2 leiame esimesest võrrandist

$$F_2 = -F_3' \cdot \cos 60^\circ + F_B \cdot \cos 60^\circ = -F\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} - F\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} = -F\sqrt{3}.$$

Oleme leidnud kõikides varrastes mõjuvad jõud. Seejuures ei vajanud me sõlme B

tasakaaluvõrrandit $\sum Y = 0$. Seda võrrandit nagu ka sõlme A tasakaaluvõrrandeid võime kasutada saadud tulemuste kontrollimiseks. Need võrrandid on rahuldatud kui jõud varraste on õigesti leitud.

Paneme võrranditesse varrastes mõjuvate jõudude väärtused ja arvutame

$$\sum Y = -F\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + F\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 0.$$

See võrrand on rahuldatud. Sellest võib järeldada, et jõud vardas 4, mille väärtuse sellesse võrrandisse panime, on õigesti leitud.

Kirjutame sõlme A (joonis 4.6 d) tasakaaluvõrrandid

$$\sum X = F_{Ax} + F_1' \cdot \cos 30^\circ - F_2 - F_5 \cdot \cos 60^\circ = 0,$$

$$\sum Y = F_{Ay} + F_1 \cdot \sin 30^\circ + F_5 \cdot \sin 60^\circ = 0.$$

Paneme ka nendesse võrranditesse leitud jõudude väärtused ja arvutame

$$\sum X = -F \frac{\sqrt{3}}{2} - 2F \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + F\sqrt{3} + F\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} = -3F \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2} F\sqrt{3} = 0,$$

$$\sum Y = 2,5F - 2F \cdot \frac{1}{2} - F\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2,5F - F - F \cdot \frac{3}{2} = 0.$$

Et võrrandid on rahuldatud, siis on varrastes mõjuvate jõudude väärtused õigesti arvutatud. Esitame töötulemused tabeli kujul

F_{Ax}	F_{Ay}	F_B	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5
$-F \frac{\sqrt{3}}{2}$	$2,5F$	$-F\sqrt{3}$	$-2F$	$-F\sqrt{3}$	$F\sqrt{3}$	$F\sqrt{3}$	$-F\sqrt{3}$

Jõud varrastes 3 ja 4 tulid positiivsed, seega need vardad on tõmmatud.

Jõud varrastes 1, 2 ja 5 tulid negatiivsed, mistõttu need vardad on surutud.

Et kõikides varrastes mõjuvad mingid jõud, siis ülearuseid vardaid, kus jõud võrduks nulliga, ei ole. Kõige enam on koormatud varras 1, kus mõjub väliskoormusest F kaks korda suurem survejõud.

KODUÜLESANNE NR 4

Leida skeemil (annab õppejõud) toodud sõrestiku varrastes mõjuvad jõud. Millised vardad on tõmmatud ja millised surutud? Kas on ülearuseid vardaid? Milline varrastest on kõige enam koormatud?

5. RASKUSKESE

Raskuskeskme asukoha teadmine hõlbustab jäiga keha teisaldamist. Näiteks, rakendades tõstejõudu raskuskeskmes, ei hakka keha pöörduma raskusjõust tingitud pöördemomendi toimel kuna jõu õlg on null.

Raskusjõud on gravitatsioonijõu ja Maa pöörlemisest tingitud tsentrifugaaljõu resultant, mis on suunatud Maa keskpunkti. Arvestades aga Maa mõõtmeid võib öelda, et vertikaalselt alla.

Raskusjõud on oma olemuselt jaotatud jõud, mis mõjub keha igale osakesele. Keha osakeste raskusjõudude resultanti nimetatakse keha raskusjõuks. Inertsiaalsetes, so paigalseisvates või ühtlaselt ja sirgjooneliselt liikuvates süsteemides on see võrdne keha kaaluga.

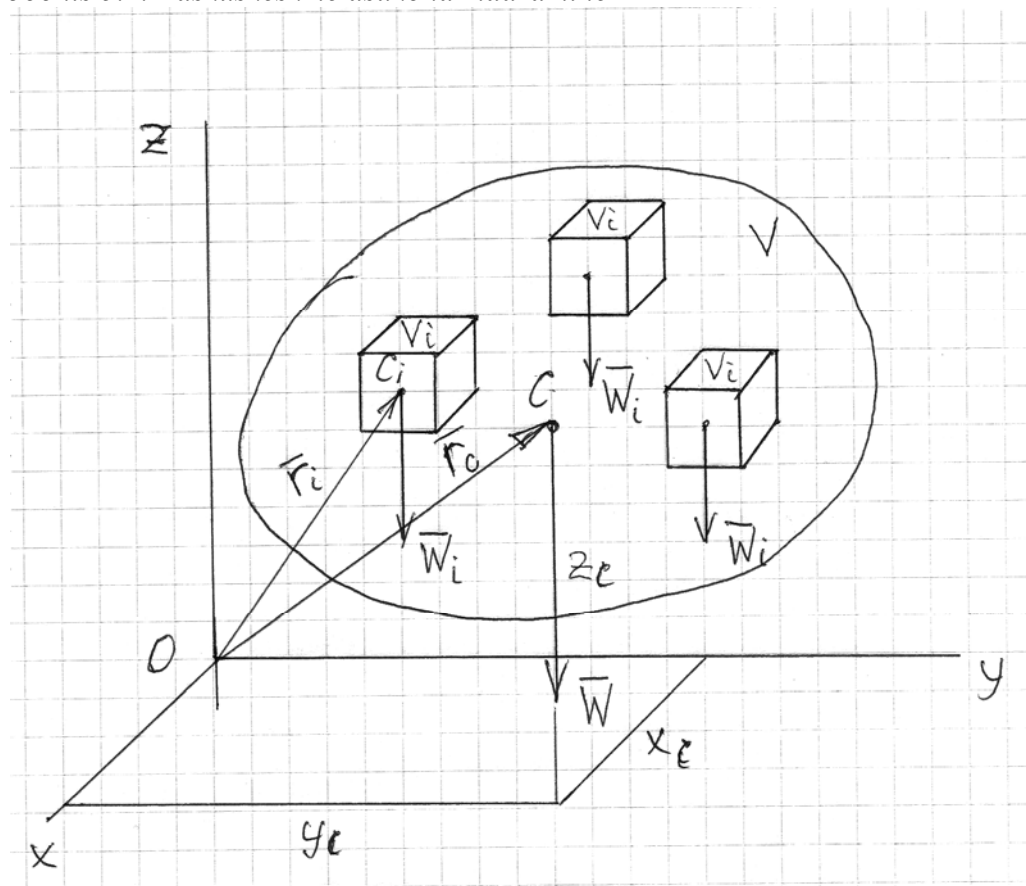
Jäiga keha raskuskeskmeks nimetatakse sellist kehaga muutumatult seotud punkti, mida läbib keha osakeste raskusjõudude resultant keha mistahes asendi puhul ruumis.

See punkt ei pruugi olla keha enda punkt, vaid ainult temaga seotud. Näiteks asub rõnga raskuskese rõnga keskel, so väljaspool keha. Kui keha pöörata, siis mistahes pöörde korral läbib raskusjõud ikkagi raskuskeset.

Seega kui kogu kehale mõjuva raskusjõu moodul on W ja igale osakesele mõjuva raskusjõu moodul W_i ning osakesi on n , siis

$$W = \sum_{i=1}^n W_i.$$

Joonis 5.1. Raskuskeskme asukoha määramine



Kogu keha raskusjõu W (joonis 5.1) moment koordinaatide alguspunkti O suhtes võrdub keha osakeste raskusjõudude W_i momentide summaga sama punkti suhtes

$$W \cdot r_c = \sum_{i=1}^n W_i \cdot r_i,$$

kus r_c on keha raskuskeskme raadiusvektor ja r_i keha osakeste raskuskeskmete raadiusvektorid. Keha raskuskeskme C asukohta me veel ei tea (seda alles otsime), kuid osakeste raskuskeskmed on meile teada. Nimelt jaotame me keha sellisteks osadeks, mille raskuskeskmed on tänu sümmeetriale hästi teada: kuup, kera, risttahukas, koonus, püramiid jne. Seega on teada ka raadiusvektorid r_i . Teada on nii kogu kehale W kui ka kõigile osakestele mõjuvad raskusjõud W_i (määratud näiteks kaalumise või arvutuste teel). Nii et ainsaks tundmatuks jääb raadiusvektor r_c , mille avaldame eelmisest võrdusest

$$r_c = \frac{\sum_{i=1}^n W_i \cdot r_i}{W}.$$

Raadiusvektori leidmiseks avaldame tema projektsioonid koordinaattelgedele:

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^n W_i \cdot x_i}{W}, y_c = \frac{\sum_{i=1}^n W_i \cdot y_i}{W}, z_c = \frac{\sum_{i=1}^n W_i \cdot z_i}{W}. \quad (4)$$

Raadiusvektori projektsioonid ongi raskuskeskme C koordinaadid.

Saadud valemeid võib kasutada keha raskuskeskme koordinaatide arvutamiseks vabalt valitud koordinaatsüsteemis. Koordinaatide alguspunkt O on otstarbekas valida nii, et ta oleks võimalikult paljude keha osade sümmeetriateljel. See vähendab arvutuste mahtu.

Homogeensele kehale ja tema osakestele mõjuvate raskusjõudude määramiseks arvutuste teel peame teadma nende ruumala V ja materjali eriraskust (erikaalu) γ . Raskusjõu arvutame siis kui

$$W = V \cdot \gamma.$$

Kui on antud keha materjali tihedus ρ , siis üleminek eriraskusele toimub nii

$$\gamma = \rho \cdot g,$$

kus g on raskuskiirendus.

Kui tiheduse ühikuks on kg/m^3 ja raskuskiirenduse ühikuks m/s^2 , siis eriraskuse ühikuks saame

$$\gamma = \rho \cdot g = \frac{kg}{m^3} \cdot \frac{m}{s^2} = \frac{N}{m^3}.$$

Homogeensete kolmemõõtmeliste kehade raskuskeskmete arvutamisel võib valemit (4) taandada eriraskusega γ . Siis pole vaja arvutada keha ja tema osakeste raskusjõude, vaid ainult ruumalaid

$$x_C = \frac{\sum_{i=1}^n W_i \cdot x_i}{W} = \frac{\sum_{i=1}^n V_i \cdot x_i}{V}, y_C = \frac{\sum_{i=1}^n W_i \cdot y_i}{W} = \frac{\sum_{i=1}^n V_i \cdot y_i}{V}, z_C = \frac{\sum_{i=1}^n W_i \cdot z_i}{W} = \frac{\sum_{i=1}^n V_i \cdot z_i}{V}. \quad (5)$$

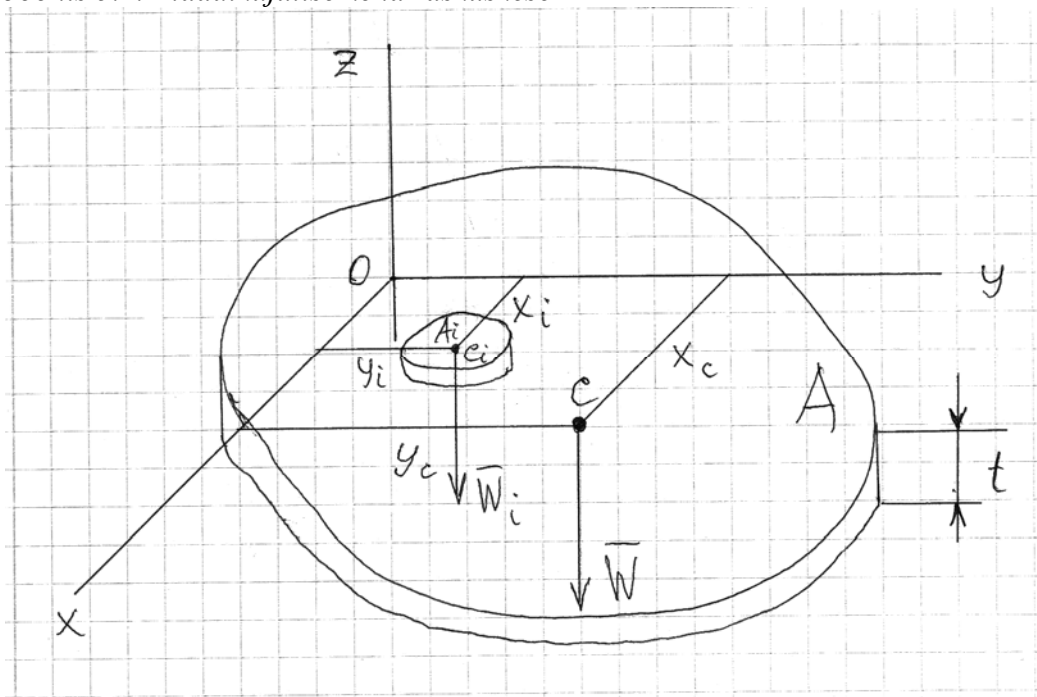
Mitthomogeensed kehad tuleb jaotada sellisteks osadeks, mille ulatuses kehad on homogeensed.

Homogeense ühepaksuse plaadi korral on keha ja tema osakestele mõjuvate raskusjõudude moodulid arvutatavad kui

$$W = V \cdot \gamma = A \cdot t \cdot \gamma,$$

kus A on plaadi pindala ja t plaadi paksus.

Joonis 5.2. Plaadikujulise keha raskuskese



Sümmeetria tõttu on raskuskese C (joonis 5.2) plaadi poole paksuse peal $z_C = t/2$ ja määrata on vaja vaid raskuskeskme kaks ülejäänud koordinaati x_C ja y_C .

Analoogselt kolmemõõtmelisele kehale jaotame plaadi osadeks, mille raskuskeskmed meile sümmeetria tõttu teada on. Kogu keha ja osakeste raskusjõudude momentide võrdsuse tingimusest võime kirjutada eeltooduga sarnaselt valemid raskuskeskme koordinaatide arvutamiseks

$$x_C = \frac{\sum_{i=1}^n W_i \cdot x_i}{W} = \frac{\sum_{i=1}^n A_i \cdot x_i}{A}, y_C = \frac{\sum_{i=1}^n W_i \cdot y_i}{W} = \frac{\sum_{i=1}^n A_i \cdot y_i}{A}. \quad (6)$$

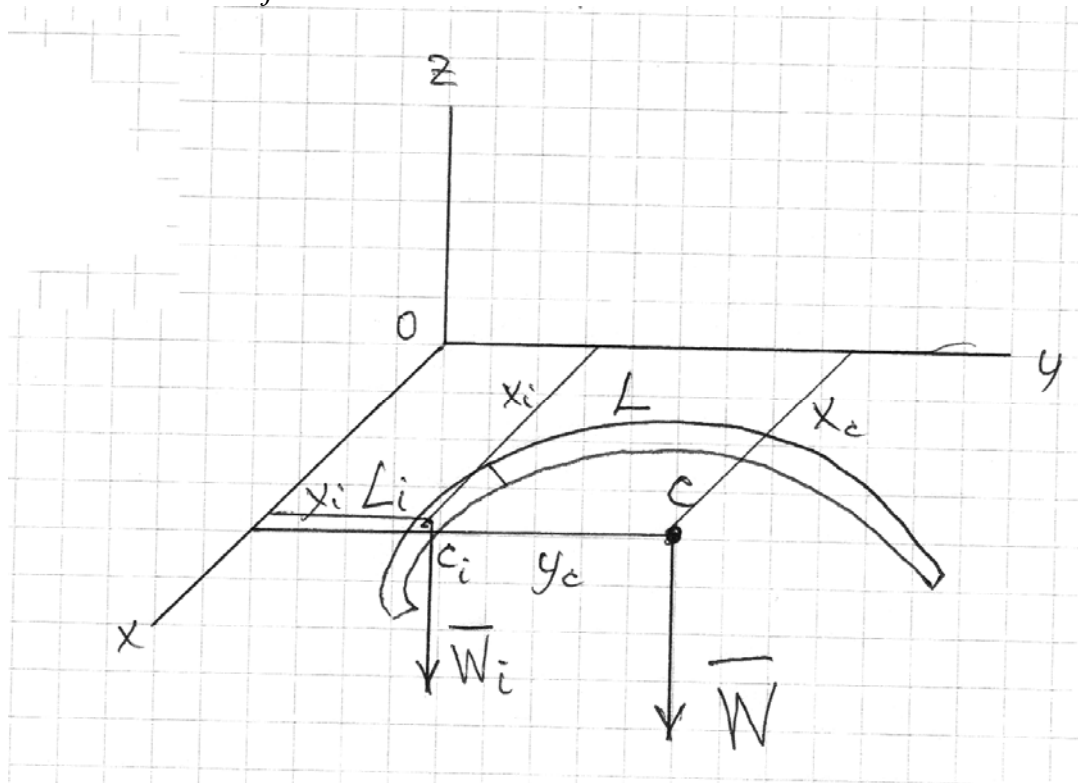
Siin on võrdust (5) taandatud lisaks eriraskusele γ veel ka plaadi paksusega t . Siis pole vaja arvutada ei kogu plaadi ega tema osakeste raskusjõude ega ruumalaid, vaid piisab pindalade arvutamisest.

Homogeense ühesuguse ristlõikega A vardale ja tema osakestele mõjuvate raskusjõudude moodulid on arvutatavad kui

$$W = A \cdot l \cdot \gamma,$$

kus l on varda pikkus või tema osakeste pikkused.

Joonis 5.3. Vardakujulise keha raskuskese



Vardakujulise keha raskuskese (joonis 5.3) asub tema ristlõike A raskuskeskmes. Seega on keha raskuskeskme üks koordinaat teada. Ülejäänud koordinaadid saab arvutada plaadikujulise keha analoogia põhjal

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^n W_i \cdot x_i}{W} = \frac{\sum_{i=1}^n L_i \cdot x_i}{L}, y_c = \frac{\sum_{i=1}^n W_i \cdot y_i}{W} = \frac{\sum_{i=1}^n L_i \cdot y_i}{L}. \quad (7)$$

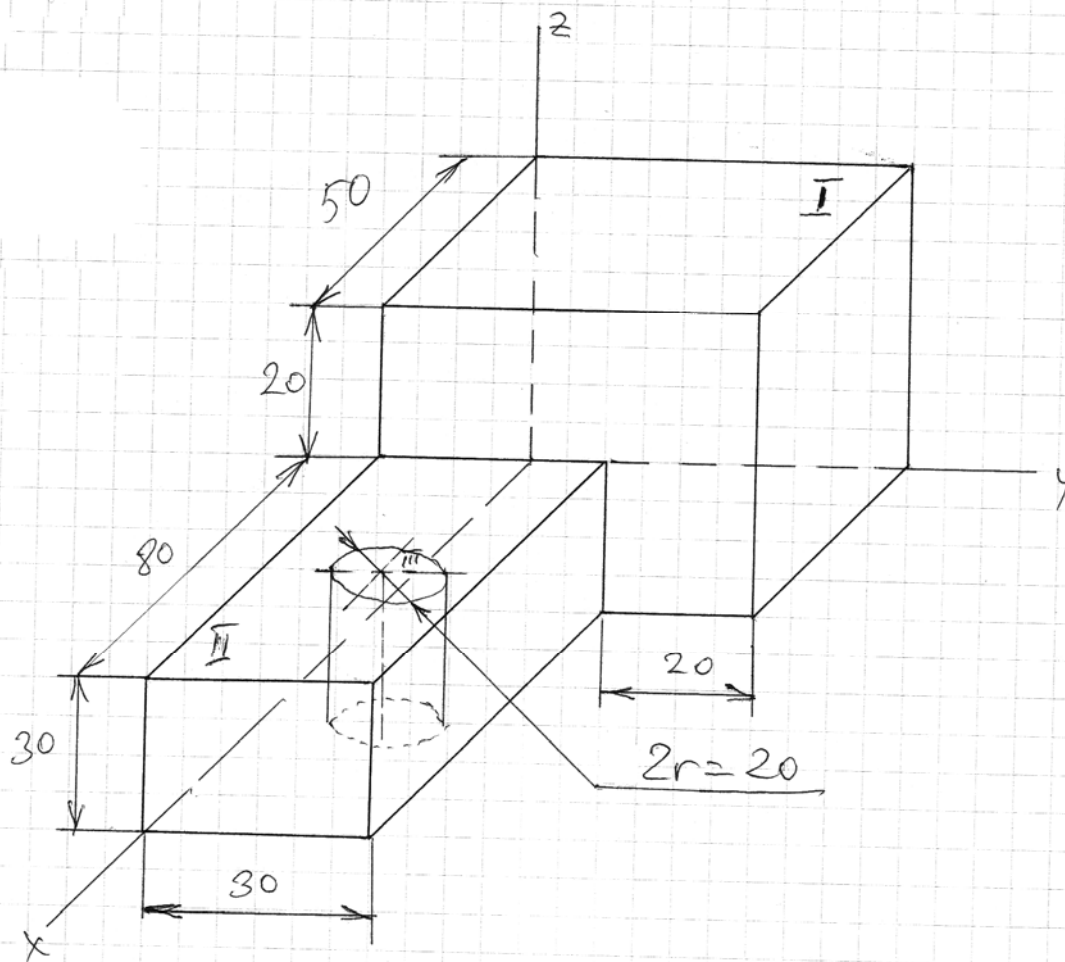
Siin on võrdust taandatud eriraskuse γ ja põikpinna pindalaga A . Nüüd saame raskuskeskme määramisel piirduda vaid varda ja tema osakeste pikkuste arvutamisega.

Vaatleme järgnevate näidete varal nende valemite praktilist kasutamist raskuskeskmete asukohtade leidmiseks.

Ülesanne 5.1

Olgu tarvis määrata joonisel 5.4 kujutatud homogeenselt materjalist keha - hulktahuka raskuskese. Keha mõõtmed millimeetrites on esitatud joonisel.

Joonis 5.4. Hulktahk



Et tegemist on kolmemõõtmelise homogeenise kehaga, siis tuleb raskuskeskme arvutamiseks kasutada valemeid (5). Keha tuleb jaotada osadeks, mille ruumalad ja raskuskeskmete koordinaate oskame määrata. Otstarbekas on jaotada keha kolmeks osaks: kuup I, risttahukas II ja silinder III. Nende ruumalade arvutamine ei valmista raskusi:

$$V_I = 50 \times 50 \times 50 = 125\,000 \text{ mm}^3,$$

$$V_{II} = 80 \times 30 \times 30 = 72\,000 \text{ mm}^3,$$

$$V_{III} = 3,14 \times 10^2 \times 30 = 9420 \text{ mm}^3.$$

Koordinaatide alguspunktiks valime hulktahuka tipu ja koordinaatteljed suuname nagu joonisel 5.4 näidatud. Sellise koordinaatidesüsteemi puhul on kõikide osade raskuskeskmete koordinaadid positiivsed.

Järgnevaid arvutusi valemite (5) järgi on otstarbekas esitada tabeli kujul

Keha	Ruumala (mm ³)		Raskuskeskmete koordinaadid (mm)			Vahepealsed arvutustulemused (mm ⁴)		
			x_i	y_i	z_i	$V_i x_i$	$V_i y_i$	$V_i z_i$
Kuup	V_I	125000	25	25	25	3125000	3125000	3125000
Risttahukas	V_{II}	72000	90	15	15	6480000	1080000	1080000
Silinder	V_{III}	- 9420	90	15	15	-847800	-141300	-141300
Hulktahk	V	187580				8757200	4063700	4063700

Arvutame kogu keha raskuskeskme koordinaadid valemite (5) järgi:

$$x_C = \frac{\sum_{i=1}^3 V_i \cdot x_i}{V} = \frac{8757200}{187580} = 46,7\text{mm},$$

$$y_C = \frac{\sum_{i=1}^3 V_i \cdot y_i}{V} = \frac{4063700}{187580} = 21,7\text{mm},$$

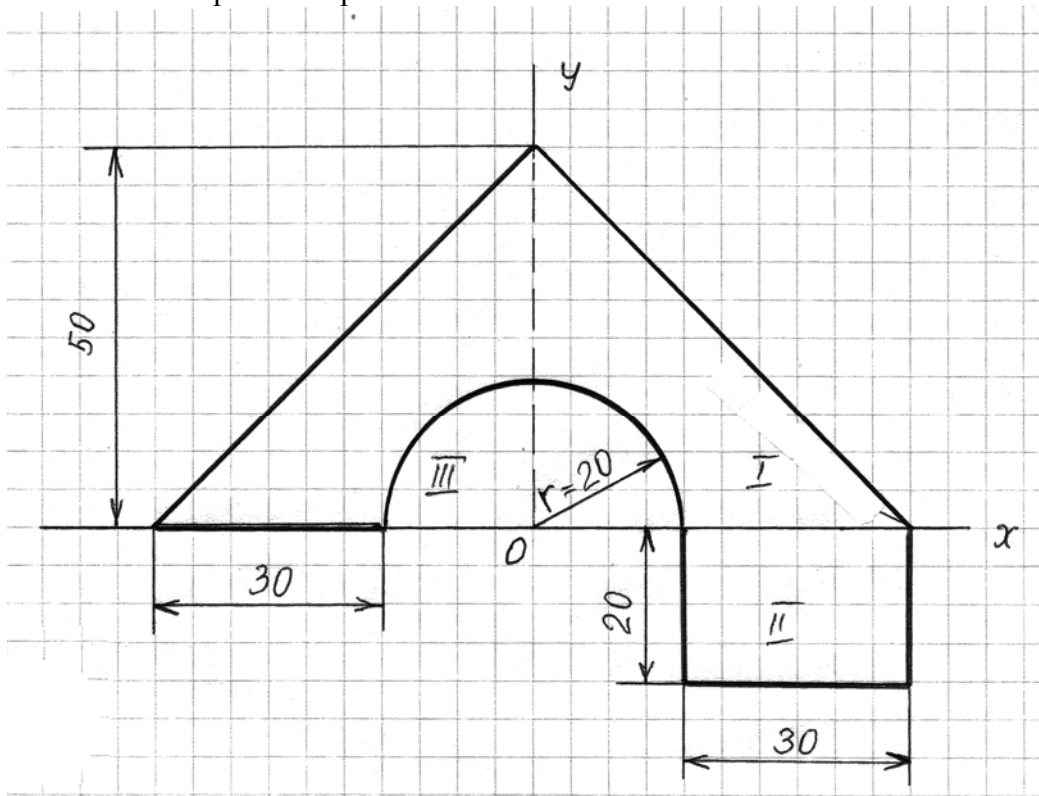
$$z_C = \frac{\sum_{i=1}^3 V_i \cdot z_i}{V} = \frac{4063700}{187580} = 21,7\text{mm}.$$

Vastus: hulktahuka raskuskeskme C koordinaadid valitud koordinaatidesüsteemis on $C(46,7; 21,7; 21,7)$

Ülesanne 5.2

Määrata joonisel 5.5 kujutatud plaadi raskuskeske. Plaadi mõõtmed millimeetrites on toodud joonisel.

Joonis 5.5. Tasapinnaline plaat



Plaadi raskuskeskme koordinaatide arvutamiseks sobivad valemid (6). Nende rakendamiseks on vaja arvutada plaadi pindala, milleks tuleb ta jaotada osadeks. Otstarbekas on jaotada plaat kolmeks osaks: kolmnurgaks I, ristkülikuks II ja poolringiks III. Liites kaks esimest ja lahutades neist kolmanda, saamegi plaadi tegeliku kuju.

$$\text{Kolmnurga pindala } A_I = \frac{(30 + 2 \cdot 20 + 30) \cdot 50}{2} = \frac{100 \cdot 50}{2} = 2500\text{mm}^2.$$

$$\text{Ristküliku pindala } A_{II} = 30 \cdot 20 = 600\text{mm}^2.$$

$$A_{III} = \frac{\pi \cdot 20^2}{2} = \frac{3,14 \cdot 400}{2} = 628 \text{ mm}^2.$$

Poolringi pindala

Koordinaatide alguspunktiks valime poolringi tsentri ja koordinaatteljed suuname nagu joonisel 5.5 näidatud. Selles koordinaatidesüsteemis määrame nii kogu kujundi kui ka tema osade raskuskeskmete koordinaadid. Geomeetriast on teada, et kolmnurga raskuskese asub kõrguse kolmandikul, ristküliku raskuskese tema diagonaalide lõikepunktis ja poolringi raskuskese diameetrist kaugusel $4r/3\pi$. Kujundi raskuskeskmete koordinaadid on toodud alljärgnevas tabelis.

Kogu kujundi raskuskeskme koordinaatide arvutused esitame tabeli kujul

Kujund	Pindala (mm ²)		Raskuskeskmete koordinaadid (mm)		Vahepealsed arvutustulemused (mm ³)	
			x_i	y_i	Ax_i	Ay_i
Kolmnurk	A_I	2500	0	16,7	0	41750
Ristkülik	A_{II}	600	35	-10	21000	-6000
Poolring	A_{III}	-628	0	8,5	0	-5338
Terve kujund	A	2472			21000	30412

Arvutame kogu kujundi raskuskeskme koordinaadid

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^3 A_i \cdot x_i}{A} = \frac{21000}{2472} = 8,5 \text{ mm},$$

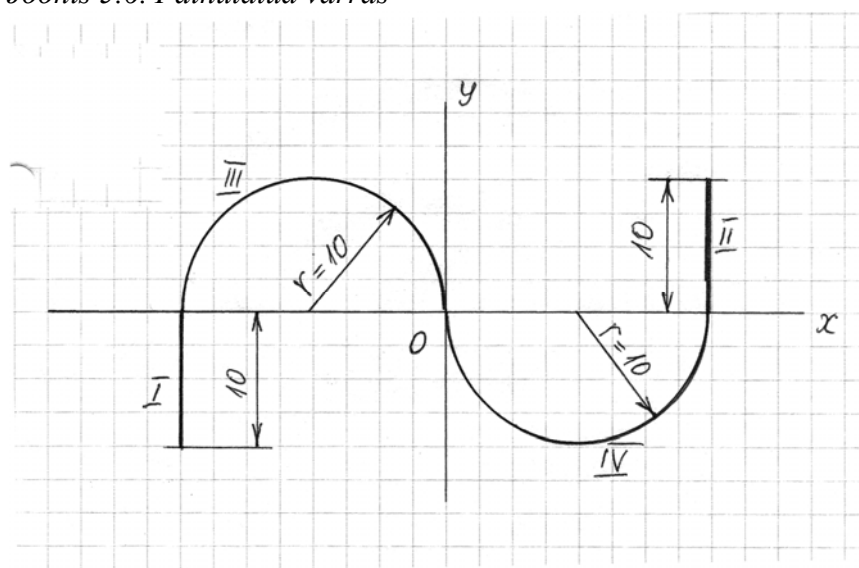
$$y_c = \frac{\sum_{i=1}^3 A_i \cdot y_i}{A} = \frac{30412}{2472} = 12,3 \text{ mm}.$$

Vastus: kujundi raskuskeskme C koordinaadid on $C(8,5; 12,3)$.

Ülesanne 5.3

Määrata joonisel 5.6 kujutatud painutatud varda – „kapsaraua” - raskuskese.

Joonis 5.6. Painutatud varras



Et tegemist on sümmeetrilise kujundiga, siis on tema raskuskese kindlasti sümmeetriakeskmes O . Paigutades sinna koordinaatide alguspunkti, võime kohe öelda, et raskuskeskme C koordinaadid on $x_c = 0$ ja $y_c = 0$. Seega võib lugeda ülesande lahendamiseks. Et see tõepoolest õige on, selles veendume arvutuste teel.

Et tegemist on homogeenise ühtlase ristlõikega vardaga, siis tuleb raskuskeskme koordinaatide arvutamiseks kasutada valemeid (7). Nende rakendamiseks arvutame kogu varda pikkuse ja nende osade pikkused, milleks me varda jaotame. Jaotame varda kaheks võrdse pikkusega sirglõiguks $L_1 = L_2 = 10$ mm ja kaheks poolringjooneks, millest kummagi pikkus on

$$L_3 = L_4 = \pi \cdot r = 3,14 \cdot 10 = 31,4 \text{ mm}.$$

Sirglõikude raskuskeskmete määramine raskusi ei valmista, kuid poolringjoonte raskuskeskmete leidmiseks kasutame geomeetriast tuntud seost, mille kohaselt poolringjoone raskuskese asub diameetrist kaugusel $2r / \pi$.

Arvutustulemused esitame tabeli kujul.

Varras		Pikkus (mm)	Raskuskeskme koordinaadid (mm)		Vahepealsed arvutustulemused (mm ²)	
			x_i	y_i	$L_i x_i$	$L_i y_i$
Sirglõik	L_1	10	-20	-5	-200	-50
Sirglõik	L_2	10	20	5	200	50
Poolringjoon	L_3	31,4	-20	6,4	-628	201
Poolringjoon	L_4	31,4	20	-6,4	628	-201
Terve varras		L	82,8		0	0

Rakendades nüüd valemeid (7) saame raskuskeskme koordinaatideks

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^4 L_i \cdot x_i}{L} = \frac{0}{82,8} = 0,$$

$$y_c = \frac{\sum_{i=1}^4 L_i \cdot y_i}{L} = \frac{0}{82,8} = 0.$$

Tulemus kinnitab juba teadaolevat.

Vastus: varda raskuskeskme C koordinaadid on $C(0; 0)$.

KODUÜLESANNE NR 5

Leida kehade, mille kujutised annab õppejõud, raskuskeskmete koordinaadid vabalt valitud koordinaatsüsteemis.