SISSEJUHATUS LOOGIKASSE

JÜRI EINTALU

Käesolev konspekt on kirjutatud loogika õpetamiseks Sisekaitseakadeemia tudengitele.

Seda saab kasutada loogika õpetamiseks ka teistes kõrgkoolides, samuti matemaatika ja füüsika kallakuga gümnaasiumi klassides.

Õpik ei ole tehniliselt liiga keerukas, mistõttu ta peaks olema jõukohane ka humanitaarkallakuga tudengeile. Matemaatikat, infotehnoloogiat või filosoofiat õppivaile tudengeile sobib see õpik aga arvatavasti vaid sissejuhatusena loogikasse, millele peaks kindlasti järgnema põhjalikumate raamatute uurimine bakalaureuse- või ka magistriõpppes.

Hoiatuseks olgu öeldud, et käesolev raamat lähtub nn kaasaegsest ehk matemaatilisest loogikast, mis rajati üle saja aasta tagasi. Nn traditsioonilist loogikat siiski põgusalt tutvustatakse. Lisaks sellele esinevad mitmed traditsioonilise loogika teemad uuel kujul ka kaasaegses loogikas.

Õpiku piiratud mahu tõttu ja soovimata muutuda pealiskaudseks ei saanud siin käsitleda kõiki huvitavaid teemasid.

Arvutustehnikaid on loogika õpikutes sageli esitatud algaja jaoks ebapiisava selguse ja detailsusega. Nende tehnikate õppimiseks tuleb viibida loengutes ja harjutustundides.[1]

Olen püüdnud viidata ka Eesti autoritele, aga eelkõige eestindatud originaaltekstidele või vähemalt Eesti raamatukogudes leiduvatele võõrkeelsetele originaaltekstidele.

Loodetavasti leiab ka professionaalne loogik või filosoof käesolevast raamatust üht-teist huvitavat.

Autor on tänulik märkuste ja küsimuste eest, mis saadetud aadressil Jyri.Eintalu@ebs.ee.

Sisekaitseakadeemia
Kase 61 12012 Tallinn
märts 2007

[1] Arvutustehnikaid on püütud puust ja punaselt esitada õppevahendis Eintalu, J. (2006) *Loogika näidisülesanded ja harjutused.* Tln: Sisekaitseakadeemia.

SISUKORD

1. MIS ON LOOGIKA

Sõnad „loogika“ ja „loogiline“ on mitmetähenduslikud.[2]

Kui öeldakse, et Paul Keresel oli males „oma loogika“, siis peetakse silmas, et Keresel oli eripärane *tegutsemisstrateegia* või *mõtlemisstiil.*[3] Kui öeldakse, et härra NN jutt on „ebaloogiline“, siis võidakse silmas pidada, et tema jutt on *seostamata.* Näiteks lauses „Ma aevastasin Tallinnas ja seejärel tabas Jaapanit tsunami“ pole aevastamise ja tsunami vahel *põhjus-tagajärg seost.* Aevastamine on tsunami suhtes asjassepuutumatu ehk *irrelevantne.* Samuti võib NN jutu „ebaloogilisus“ tähendada, et tema jutt on *arusaamatu.* Aga ka härra NN tegevuse kohta võidakse öelda, et see on „ebaloogiline“. Sel juhul peetakse ehk silmas, et tema tegevus pole arukas, on *irratsionaalne.* Näiteks soovib ta teed keeta, aga asetab veekannu külmkappi.

Loogika õpikud ja loogika kui teadus siiski ei keskendu ülalmainitud asjadele. On aga veel üks sõna „ebalooogiline“ tähendus. Näiteks võib härra NN lausuda: „Mul on taskus üks kuldmünt, aga tegelikult ei ole.“ Kui nüüd ütleme, et NN jutt on „ebaloogiline“, siis peame silmas seda, et tema jutt on *vasturääkiv*, *vastuoluline*, et ta jaatab ja eitab üht ja sama asja korraga. – Just selliseid asju uuribki teadus, mida kutsutakse loogikaks.

Sissejuhatav definitsioon

Vaevalt, et ühegi teaduse ammendavat ja täpset definitsiooni saaks lühidalt esitada või siis üldse anda. Lähtume siin aga järgnevast *sissejuhatavast* määratlusest:

Loogika on teadus mõtlemise kõige üldisematest reeglitest.

Neid reegleid nimetame edaspidi *loogikareegliteks.*

Et tegemist on mõtlemise *reeglitega*, ütleb seda, et kui neid reegleid rikume, siis mõtleme vigaselt.

Et tegemist on *kõige üldisemate* reeglitega, ütleb seda, et kui rikume loogikareegleid, siis mõtleme nii kui nii vigaselt – olenemata sellest, kas me mingeid muid, näiteks faktivigu oleme teinud või mitte. Teatavas mõttes on loogikavead kõige põhilisemad vead, mida arutleja üldse saab teha.[4]

Vastuoluseadus

Läbi aegade on mõtlejad kõikide loogikareeglite seast tähtsaimaks pidanud *vastuoluseadust*, mille pikemaks nimeks on *vastuolusid välistav seadus:*

Kõik vastuolulised väited on väärad.

---

[2] Sõna „loogika“ pärineb kreekakeelsest nimisõnast *logos* (kreeka tähtedega: *λόγος*), mis omakorda tuleneb tegusõnast *legein*, mis tähendab: „ütlema (midagi tähtsat)“. Sõna *logos* oli antiikkreeklastel mitmetähenduslik: „kirjeldus“, „teooria“, „seletus“, „põhjendus“, „mõtlemisvõime“, „printsiip“, „mõistus“ või „proosa“ (Stead 1998: 817). Liitsõnades tähendab sõnalõpp „-loogia“ tänapäeval *õpetust* või *teadust.* Näiteks geoloogia on teadus planeet Maast.

[3] *Logikē technē* on kreeka keeli: „mõtlemiskunst“.

[4] Hiljem siiski näeme, et loogikud on siin liialdanud. Sugugi mitte kõikide loogikareeglite järgimine pole igati kohustuslik. Vastuoluseadust tõesti ei tohiks rikkuda. Seevastu mitterange järeldamine on tihti isegi hädavajalik.

Loogika tegeleb mitte igasuguste lausetega – nagu näiteks küsilaused –, vaid eelkõige *väidetega* – lausetega, mis *kirjeldavad maailma.* „Kas praegu lund sajab?“ on küsimus. „Jah, praegu lund sajab,“ on aga väide, mis kirjeldab maailma, asjaolusid.

Vastuoluline väide on *vasturääkivus*[5] ehk *vastuolu:*

Vastuolu jaatab ja eitab üht ja sama asja korraga.

Vastuoluline on näiteks väide:

Mul on taskus kuldmünt ja mul ei ole taskus kuldmünt.

Vastuoluseaduse põhjal on see väide väär, ta ei vasta tõele.

Vastuoluline võib olla ka jutustus, mõte, teooria, hüpotees vms. Edaspidi räägime siiski lihtsalt väidetest (mis võivad aga olla pikad ja keerulised).

Mittevastuolulisi väiteid nimetatakse kooskõlalisteks.

Kuna kõik vastuolulised väited on väärad, siis ei saa maailm olla selline, nagu vastuolulises väites kirjeldatud. Ainult kooskõlaliste kirjelduste seas saab olla maailma tõene kirjeldus. Maailmas ei saa ükski asi korraga olla (nii) ja samas mitte olla (nii).

Kui kirjeldus on vastuoluline, siis on ta väär. Kui tahame sääraseid vigu vältida, siis peame hoiduma andmast vastuolulisi kirjeldusi. Selles mõttes ongi vastuoluseadus mõtlemise norm, reegel.

Ühtlasi näeme, mis tähenduses on loogikareeglid „kõige üldisemad“ mõtlemise reeglid. Olenemata faktidest (näiteks ajaloofaktid), olenemata loodusseadustest (näiteks Newtoni seadused) – ükski vastuoluline kirjeldus ei saa vastata tõele. Leibniz (1646 – 1716) eristas *võimatuid* maailmu, mille kirjeldused on vastuolulised, ja *võimalikke* maailmu, mille kirjeldused on kooskõlalised. *Tegelik* maailm saab olla vaid üks võimalikest. Kaasajal arutletakse analoogiliselt nn *modaalloogikas.*

Kui teadlane otsib tegeliku maailma õiget kirjeldust, siis juhindub ta vaatlustest. Kuid kui tema teooria sisaldab vastuolu, on see igal juhul vigane. See asjaolu võimaldabki füüsikutel välja praakida mitmeid teooriaid veel enne kulukate eksperimentide sooritamist. Seda, et teooria on vastuoluline, on võimalik teada saada *a priori* – faktidest sõltumatult, lihtsalt mõtlemise teel. Me võime eksida loodusseadustes, kuid vastuoluseadus kehtib olenemata sellest, millised need on.

Vastuoluseadust tunti juba enne Aristotelest (384 – 322 ema), kes rajas süsteemse loogikateooria. Näiteks Zenon (u 490 – 430 ema) rakendas seda seadust oma kuulsates apooriates. Vastuoluseadusel oli tähtis roll ka keskaegsetes dispuutides.

Vastuoluseadust peetakse tähtsaimaks loogikareegliks, sest arvatakse, et kõik teised loogikareeglid taanduvad temale, et ka näiteks loogilise järeldamise reeglid tulenevad vastuoluseadusest. Näiteks Kant (1724 – 1804) pidas loogikalisi otsustusi „analüütilisteks“. Ta kirjutas (Kant 1982: 21):

> Kõik analüütilised otsustused tuginevad täielikult vasturääkivuse seadusele...

---

[5] Vene k: *противоречие*; inglise k: *contradiction.*

Formaalloogika

Traditsioonilist loogikat kutsutakse sageli „formaalseks“. Mõne õpiku pealkirjakski on: *Traditsiooniline formaalne loogika* (vt Vuks 1999). Kaasaegset loogikat terminiga „formaalne“ miskipärast sageli ei kostitata. Siiski on mõlemad loogikad *formaalsed.*

Loogika on formaalne järgmises tähenduses. Vaatame uuesti vastuolulist väidet

Mul on taskus kuldmünt ja mul ei ole taskus kuldmünt.

Selles väites sisaldub alamväide „Mul on taskus kuldmünt,“ mida on nii jaatatud kui eitatud. Tähistame selle alamväite tähega *A:*

A – Mul on taskus kuldmünt.

Siis saab meie vastuoluline väide järgneva kuju:

A on tõene ja A ei ole tõene.

Teisiti võib selle kirja panna ka nõnda:

A ja mitte-A. **(1.1)**

Tõlgime nüüd sümboolse kirjapildi (1.1) kõnekeelde tagasi, kasutades hoopis tähistust:

A – Suurim algarv on olemas.

Sel juhul saame hoopis väite:

Suurim algarv on olemas ja suurimat algarvu ei ole olemas.

Kuid ka see väide on vastuolu ja seega vastuoluseaduse põhjal väär.

Mistahes väide kujul (1.1), kus *A* on mistahes alamväide, on vastuolu ja seega väär. Pole oluline, *mida* on korraga jaatatud ja eitatud.

Et väide kujul (1.1) on väär, ütleb vastuoluseadus, lähtudes üksnes selle väite formaalsetest, vormilistest omadustest – olenemata alamväite *A* tähendusest ning seega ka olenemata sellest, kas *A* on tõene; niisiis ka olenemata sellest, millised on maailma asjaolud.

Ükskõik, kas mul on taskus kuldmünt või mitte. Ükskõik, kas suurim algarv on olemas või mitte. Väide, mille *vorm* on (1.1), on ikka väär.

Selles tähenduses ongi loogika *formaalne:* loogikareeglid ei lähtu väidete sisust ega nende faktilisest tõesusest. Nad lähtuvad vaid väidete *loogilisest vormist.*

Seetõttu saabki arvuti sooritada loogilisi rehkendusi, teadmata, millest räägivad need märgid, millega ta opereerib. Arvuti juhindub vaid väidete loogilisest vormist. Ta saab lähtuda vaid sellest, mis talle on sisestatud.

Ka inimesel, kui ta paberile kirjutab ja loogikareegleid kasutab, tuleb kõik asjassepuutuv kirja panna. Formaalloogika ei tunne asju, mida vaikimisi eeldatakse, aga mida kirja pole pandud.

Kaasaegset, matemaatilist loogikat nimetatakse mõnikord ka *sümbolloogikaks*, sest selles kasutatakse sümboleid nagu *A* või *x*. Sümbolite kasutamine toobki täiesti ilmsiks, et loogikareeglid on formaalsed. Nii on kaasaegne loogika isegi „formaalsem“ kui traditsiooniline loogika.

Faktitõed ja loogikatõed

Traditsiooniliselt eristatakse kahte liiki tõdesid – 1) faktitõed; 2) loogika- ja matemaatikatõed.[6]

Faktitõeks on näiteks see, et planeet Maa tiirleb ümber Päikese. Tähtsaks loogikatõeks on see, et kõik väited kujul „*A* ja mitte-*A*“ (valem (1.1) ülalt) on väärad. Matemaatikatõeks on näiteks aritmeetikatõde *1 + 1 = 2.*

Nii nagu on kahte sorti tõdesid, nii on ka kahte sorti vigu: 1) faktivead; 2) arutlusvead.

Faktitõed

Väite „Mul on taskus kuldmünt“ tõesus või väärus sõltub sellest, milline on maailm. Tegemist on *faktiväitega*, mis on tõene või väär olenevalt sellest, kas ta kirjeldab maailma õigesti või valesti, kas ta *vastab* või mitte maailma asjaoludele.[7] 1944. a avaldas Tarski (1902 – 83) kokkuvõtte oma uurimustest tõedefinitsiooni alalt. Tarski (1999: 147):

Lause 'lumi on valge' on tõene parajasti siis, kui lumi on valge.

Faktiväite tõesus-väärus sõltub selle *väite ja maailma vahekorrast.* Kui see vahekord on õige, siis on tegemist faktitõega; kui see vahekord on vale, siis on tegemist faktiveaga.

Loogikatõed

Ent vastuolulise väite „*A* ja mitte-*A*“ (vt (1.1) ülalt) kohta ütleb vastuoluseadus meile järgmise tõe:

Kõik väited kujul 'A ja mitte-A' on väärad. **(1.2)**

Vastuoluseadus (1.2) väidab seda, olenemata alamväite *A* tähendusest ning tõesusest või väärusest. Seega vastuoluseadus on väide, mille tõesus ei sõltu maailma asjaoludest. Vastuoluseadus ei ütle midagi maailma omaduste kohta. Kuigi väide *A* ise võib olla faktiväide, ei saa faktiväiteks olla vastuoluseadus. Vastuoluseadus (1.2) kui väide on *loogikaväide* ja kui tõde on ta *loogikatõde.*

Ent kui loogikatõed ei ütle midagi asjaolude kohta ning nende tõesus ei sõltu väidete ja maailma vahekorrast, millest loogikaväited siis räägivad ja millest sõltub nende tõesus?

Vastuoluseadus (1.2) ütleb lihtsalt seda, et **väited „*A*“ ja „mitte-*A*“ ei saa korraga tõesed olla.**[8]

Loogikaseadused väljendavad mitte väidete suhet maailmaga, vaid *väidete omavahelisi suhteid.* Loogilised seosed on puhtalt keelelised ega puuduta keele ja maailma vahekorda.

Loogika ja matemaatika ei tegele faktitõdede ja -vigadega. Nad pole empiirilised teadused nagu füüsika. Loogikareeglid ei anna maailma kohta infot. Seetõttu kehtivadki nad üldiselt – olenemata faktidest. Neid võib teada saada maailma vaatlemata ehk *a priori* – mõtlemise teel. Loogikareeglid vaid piiritlevad seda, mis asi üldse saab olla fakt. Nad pole vaatluste najal revideeritavad.

Loogikat oleks raske mõista ilma ülaltoodud eristuseta fakti- ja loogikaväidete vahel (või vastavalt: sünteetiliste ja analüütiliste otsustuste vahel). Ent J. St. Mill (1806 – 73) pidas loogikat

---

[6] Me ei käsitle siin küsimust, kas matemaatika taandub loogikale või millises vahekorras on aritmeetika, hulgateooria ja loogika. XX sajandi alul oli populaarne *logitsism* – püüd esitada matemaatikat loogika haruna.

[7] Selle Aristoteleselt (384 – 322 ema) pärit vaate edasiarenduseks on nn „tõe vastavusteooria“ (või „tõe korrespondentsteooria“), mis on siiski vaid üks mitmetest kaasaegsetest tõeteooriatest.

[8] Näiteks, kui üks tunnistaja väidab *A* ja teine tunnistaja väidab *mitte-A*, kus väitel *A* on üks ja sama ning täpne tähendus, siis ei saa nende tunnistajate ütlused mõlemad korraga tõesed olla.

empiiriliseks teaduseks (vt nt Cryan jt 2003: 120–5). XX sajandil on seda eristust aga õõnestanud Quine'i 1951. a ilmunud kuulus artikkel „Empirismi kaks dogmat.“ (Quine 1999).

Propositsioonid

Laused

Lause (ing k: *sentence*) koosneb sõnadest. Lauset võib paberile kirjutada või häälitsusena lausuda.

Väited

Mõni lause on küsilause. Mõni lause on aga kirjeldav ehk deskriptiivne: ta ütleb, et asjad on nii-ja-nii. Sellist lauset nimetame *väiteks* (ing k: *statement*). Väide kirjeldab maailma õigesti või valesti ja on seega kas *tõene* või *väär.* Näiteks „Praegu vihma sajab“ on väide, mis on tõene või väär.

Me nentisime, et loogika tegeleb eelkõige väidetega. Samuti leidsime, et loogikareeglid ei ütle midagi väidete ja maailma vahekorra kohta – nad kirjeldavad vaid väidete omavahelisi seoseid.

Propositsioonid

Ent väited on siiski laused ja nad koosnevad sõnadest, olles kirjutatult paberil või sõnadena keelel. Mis asi see siis ikkagi on, mis on kas tõene või väär? – Loogikud ja filosoofid on siin täheldanud mitmeid kaelamurdvaid nüansse (vt nt Engel 1998, Ramsey 1999 või Wright 2001a).

Esiteks, kui väide on lause, mis koosneb sõnadest, siis saab kahe erineva lausega „väita ühte ja sama asja“. Näiteks lausudes eesti keeli „Praegu vihma sajab“ või inglise keeli „It's raining now.“

Teiseks, kui väide on lause, mis koosneb sõnadest, siis saab ühe ja sama lausega väita erinevaid asju. Näiteks mina ütlen: „Mul on külm,“ ja ka sina ütled: „Mul on külm.“

Kolmandaks, mõned laused näevad grammatiliselt välja igati korralike väidetena, ent nad ei oma mõtet, ei väljenda midagi ja pole seega ka tõesed ega väärad. Näiteks: „Spunk on jahe.“

Seepärast ongi loogikud leiutanud mõiste *propositsioon* (ing k: *proposition*).[9]

Propositsioon on väite sisu, tähendus, mõte.
Propositsioon on see, MIDA väidetakse.
Propositsioon on see, mis on kas tõene või väär.

Erinevad laused võivad väljendada üht ja sama propositsiooni. Üks ja sama lause võib väljendada erinevaid propositsioone. Mõni näiline väide on mõtestamata ega väljenda propositsiooni.

Enamasti defineeritaksegi loogika umbes järgnevalt (vt nt märksõna „logic“ teatmikust *The New Encyclopædia Britannica* (1994: 447–8)):

Loogika on teadus propositsioonide omavahelistest objektiivsetest seostest
ega käsitle propositsioonide ja maailma vahekorda.

Kaasaegse loogika rajajaist on sedasi mõtelnud Frege (1848 – 1925) ja Russell (1872 – 1970).

Kaasaegse loogika vundamenti kutsutakse eesti keeli *lausearvutuseks* (Tamme jt 1997: 65–93). Selle täpsem nimi oleks küll *väitearvutus.* Rahvusvahelises teaduskeeles – inglise keeles – kutsutakse seda loogikaharu aga „propositsioonarvutuseks“ (ing k: *propositional calculus*).

[9] Eesti k on „propositsioon“ vaid loogika termin. Ing k tähendab *proposition* kõnekeeli ka: „ettepanek“.

Kuigi enamik loogikuid leiab, et propositsiooni mõisteta ei saa loogikat käsitleda, pole nad siiski üksmeelel selles, kuidas propositsioone täpselt defineerida.

Omapärane vaade oli Bolzanol (1781 – 1848), kelle järgi propositsioonid on teatavas mõttes olemas ja seega tõesed või väärad ka siis, kui keegi neid ei lausu ega mõtle (Künne 1998: 824–5). Vt ka Frege (1999: 21) sarnast vaadet. Seevastu Quine (1908 – 2000) eitas propositsioonide olemasolu.

Nii propositsioonide olemasolu jaatajail kui ka eitajail on oma raskusi.[10]

Loogilised järeldused

Kuigi loogikud on vastuoluseadust pidanud loogika aluseks, eelistavad nad siiski enam tähelepanu pöörata teistsugustele loogikareeglitele – nimelt *loogilistele järeldustele* (vt nt (Frege 1999: 21)). Range, ehk loogilise järelduse näitena vaadelgem järgmist järeldust:

Kõik linnud on lendajad.
Vares on lind. **(1.3)**
Vares on lendaja.

Siin joone kohal asetsevad väited on järelduse *eeldused.* Antud näites on järeldusel *2* eeldust, ent üldiselt võib eeldusi olla *1*, *2* või rohkem.

Joone all asetsev väide on järelduse *tulem.* Kuigi fikseeritud eeldustest saab alati järeldada lõpmata palju erinevaid tulemeid, kirjutatakse igas konkreetses järelduses välja siiski vaid üks tulem.

Tulem on see, mis eeldustest *järeldub.*[11] Tulemit on nimetatud ka „järelduseks“, ent see oleks kahemõtteline: sõna „järeldus“ tähistaks siis nii seost eelduste ja tulemi vahel kui ka tulemit.[12]

Näidet (1.3) ülalt loeme nii: „Kõik linnud on lendajad. Vares on lind. Järelikult: Vares on lendaja.“

Loogiline järeldus toetub vastuoluseadusele

Ent mida sellega silmas peetakse, kui öeldakse, et antud eeldustest „järeldub“ antud tulem?

Range, ehk loogilise järeldusega on tegemist siis ja ainult siis,
kui eelduste tõesuse korral on/oleks tulemi tõesus paratamatu.[13] **(1.4)**

Näites (1.3) ongi ilmne, et kui eeldused on tõesed, siis on *vältimatu*, *paratamatu*, et ka tulem on tõene. Olukorras, kus kõik linnud on lendajad ja vares on lind, on *võimatu*, et vares pole lendaja.

Ent mis *tähenduses* on tulemi tõesus „vältimatu“, „paratamatu“, tema väärus „võimatu“?

Me ei pea siin silmas näiteks paratamatust alluda gravitatsiooniseadusele. Formaalloogiline järeldus toitub ju vaid sellest, mis on eeldustes avalikult kirjas – aga eeldustes polnud siin gravitatsiooniseadust mainitud. Pealegi ei lähtu formaalloogilised seosed mitte väidete sisust, vaid nende loogilisest vormist. Järelduse (1.3) ülalt loogiline vorm on säärane:

[10] Propositsioonide olemasolu küsimus seostub filosoofia klassikalise probleemiga: „Mis asjad on arvud?“

[11] Tulemit kutsuti monograafias Eintalu 1996 uudissõnaga „järeldis“, ent see ei saanud populaarseks.

[12] Ing k siin segadust pole: „eeldused“ – *premises*, „järeldus“ – *inference* ja „tulem“ – *conclusion.*

[13] Selles definitsioonis ei nõuta, et järelduse eeldused peavad olema tõesed. Selgituse anname allpool.

$$\frac{\begin{array}{l}\textit{Kõik X-d on Y-d.}\\ \textit{a on X.}\end{array}}{\textit{a on Y.}} \qquad \mathbf{(1.5)}$$

Kui tähistaksime: *X* – kalad; *Y* – ujujad; *a* – ahven; siis formaalne järeldus (1.5) annaks (1.3) asemel hoopis järelduse: „Kõik kalad on ujujad. Ahven on kala. Järelikult: Ahven on ujuja."

Loogilises järelduses peetakse silmas *loogilist paratamatust*, mis ei sõltu maailma sellistest omadustest nagu gravitatsiooniseadus. Loogiline paratamatus johtub *vastuoluseadusest*, mis ütleb, et vastuolud on väärad. Näites (1.3) olekski vastuoluline väita: „Kõik linnud *on* lendajad ja vares *on* lind, kes *pole* lendaja," – sest see sisaldaks mõtet „Vares on ja ei ole lendaja." Üldiselt:

Range, ehk loogilise järeldusega on tegemist siis ja ainult siis, kui eelduste jaatamine ja tulemi eitamine annaks vastuolu. **(1.6)**

Vaatame teist näidet loogilisest järeldusest:

$$\frac{\textit{A ja B}}{A} \qquad \mathbf{(1.7)}$$

A ja *B* on siin mingid väited. Näiteks: *A – Päike paistab; B – Tuul puhub.* Eeldusest „Päike paistab ja tuul puhub" järeldub: „Päike paistab." Kui on tõsi, et päike paistab ja tuul puhub, siis ei ei saa olla tõsi, et päike *ei* paista. Kui *A ja B* on tõene, siis *A* ei saa olla väär – muidu saaksime vastuolu *A ja mitte-A*. „Päike paistab ja tuul puhub, aga päike ei paista" on ilmselt võimatu olukord.

Kriitiline märkus

Siiski pole me ülaltooduga tõestanud, et loogilised järeldused on seletatavad, viidates *ainult* vastuoluseadusele. Kõigepealt tuleb see ju veel läbi näha, et antud eelduste jaatamine ja antud (oletatava) tulemi eitus kokku annavad vastuolu. Pole aga veel sugugi selge, kas sellise vastuolu tõestamise algoritm ise taandub samuti vastuoluseadusele. Kui näites (1.7) ülalt oli kerge läbi näha, et eelduste jaatamine ja tulemi eitamine kokku annavad vastuolu, siis keerukamatel juhtudel on see raskem. Seetõttu ei saa me veel kinnitada, et loogilised järeldused taanduvad täielikult vastuolule.[14] Kahtlusi võib lisada Quine'i (1999) püüd hägustada fakti- ja loogikaväidete vahelist piiri.

Loogiline järeldus kui konditsionaal

Järeldusi saab kirjutada ka vasakult paremale. Näiteks järeldus (1.7) ülalt on esitatav nii:

$$(A \textit{ ja } B) \Rightarrow A \qquad \mathbf{(1.8)}$$

Üldiselt on iga järeldus esitatav kujul

$$p \Rightarrow q, \qquad \mathbf{(1.9)}$$

kus *p* on eeldus (kõiki eelduseid väljendav väide), aga *q* on tulem.

Öeldes, et (1.8) on loogiline järeldus, mõtleme me järgmist: „Kui *A ja B* on tõene, siis on vältimatult tõene ka *A*." Üldiselt, väita järeldust (1.9) on sama, mis väita:

Kui *p* on tõene, siis on vältimatult tõene ka *q*. **(1.10)**

---

[14] Detailsemalt argumenteerisin nõnda väitluses „Induktsioon ja oletus" (Eintalu & Notturno 1999: 2163–5).

Väites nõnda, pole me aga midagi ütelnud selle kohta, kas eeldus *p* on tõene või mitte (vt nt (Frege 1999: 21)).[15] Näiteks järeldus (1.8) ülalt oli ju puhtformaalne ega puudutanud faktitõdesid. Tähistame: *C* – „*p* on tõene," *D* – „*q* on vältimatult tõene." Siis saab järeldus (1.10) kuju:

$$\text{Kui } C\text{, siis } D. \qquad \textbf{(1.11)}$$

Väited kujul (1.11) on tingimuslikud laused ehk *konditsionaalid* (vt nt *Conditionals* 1991 & Sanford 2003). – Niisiis, väites järeldust, väidame konditsionaali (vt ka Wright 2001b). Väites konditsionaali (1.11), pole me aga maininud, kas selle tingimus *C* on rahuldatud. Näiteks ka lause „Kui vihma sajab, siis maa on märg" on konditsionaal. Ent see lause ei kinnita ega eita, et vihma sajab.

Seega: **Loogiline järeldus on konditsionaal ega sõltu eelduste tõesusest-väärusest.**

Järeldamine ja tõestamine

Arutlustes võib ette tulla nii loogika- kui ka faktivigu.

Järelduse kehtivus

Kirjutada võib õige võrduse *1 + 1 = 2* või ka ebaõige võrduse *1 + 1 = 3* (nagu ma just äsja tegin). Samuti võib kirjutada range, loogilise järelduse (1.8) *(A ja B)* $\Rightarrow$ *A* või ka mitterange järelduse

$$A \Rightarrow (A \text{ ja } B) \qquad \textbf{(1.12)}$$

Keegi võib viisil (1.12) järeldada. Mõni võib koguni uskuda, et säärane järeldus on range.

Ent (1.12) *ei ole* loogiline järeldus. Poleks vastuoluline ütelda näiteks: „Päike paistab, aga pole tõsi, et päike paistab ja tuul puhub." – Selles ei sisalduks ju vastuolu „Päike paistab ja ei paista."

Kui järeldus on range, loogiline järeldus (nagu (1.8)), siis öeldakse ka, et ta on *kehtiv* (ing k: *valid*). Kui järeldus on mitterange (nagu (1.12)), siis öeldakse, et ta on *mittekehtiv* (ing k: *invalid*).

Järelduse kehtivus ei sõltu sellest, kas tema eeldused on tõesed.

Järelduse korrektsus

Kehtivat järeldust, mille eeldused on tõesed, nimetatakse *korrektseks* (ing k: *correct* = „veatu"). *Ebakorrektse* (ingl k: *incorrect*) järelduse puhul on kas: 1) tema eeldused väärad; 2) ta on mittekehtiv järeldus; või 3) ta on väärate eeldustega ja mittekehtiv järeldus.

Traditsiooniliselt leitakse, et fakti- ja loogikavigadeta järeldus on korrektne, loogikavigadeta järeldus aga kehtiv. Loogikateadus tegeleb üksnes järelduste kehtivuse teemaga.

Tõestamine

Nn „tõestamisele" on panuseid tehtud. Vihjab sellele kas või õpiku pealkiri: *Loogika. Mõtlemisest tõestamiseni* (Tamme jt 1997), mis meenutab pealkirja *Kivikirvest aurumasinani* (Klemm 1973).

Ent mis on tõestamine? – Selleks, et arutluse najal tõestada, et väide *q* on tõene, tuleb näidata: 1) et *q* kehtivalt järeldub mingist väitest *p*; 2) et *p* on tõene.

Seega tõestava järelduse *p* $\Rightarrow$ *q* korrektsus on *tarvilik.* Väidet *q* ei saa tõestada, kasutades mittekehtivat järeldust või järeldades ta väärast eeldusest *p*.

Ent see veel ei tähenda, et järelduse korrektsus oleks *piisav* (mõned õpikud eksivad siin).

[15] Ma ise eelistaksin nõuda, et eeldus *p* peab olema *kooskõlaline* (Eintalu 1996). Kui *p* on vastuolu, siis on *p* tõesus ju loogiliselt võimatu ja on mõttetu lausuda „Kui *p* on tõene..." Pealegi, selle nõudeta saab vastuolust „järeldada" *mis tahes* väite (nn „implikatsiooni paradoks"). Ent siin lähtume traditsioonilisemast järelduse definitsioonist.

Tõestamaks väidet q: 1) peab järeldus $p \Rightarrow q$ olema korrektne; 2) peame me ka *teadma*, et ta on korrektne. Väite q tõestamiseks tuleb *teada*, et eeldus p on tõene ja et järeldus $p \Rightarrow q$ on kehtiv.

Kui arvuti annab mulle tulemuse, kasutades õigeid andmeid ja õiget algoritmi, siis pole see tulemus mulle tõestatud seni, kuni ma kahtlen arvuti andmeis või tema algoritmis.

Tõestamaks Newtoni mehhaanika abil väidet, et Kuu kukub alla, tuleb see väide Newtoni mehhaanikast ja algandmeist loogiliselt järeldada. Lisaks sellele peame me aga ka teadma, et järeldasime rangelt ja et Newtoni mehhaanika ning meie algandmed on õiged.

Tõestamise ideaal sai alguse Aristotelesest (384 – 322 ema) ja on hinges püsinud tänini.[16] Ent pärast Hume'i 1739. a ja Popperi 1935. a ilmunud töid (Hume 1985 & Popper 2004) on vähe neid, kes usuvad, et teadusteooria õigsust võib kindlalt teada või tema najal midagi olulist tõestada.

Kui loogika peamiseks rakenduseks oleksid tõestused, kahandaks see oluliselt loogika rolli, jättes talle peamiselt vaid matemaatika- ja loogikatõdede valdkonna.[17]

Ebakorrektsed järeldused

Tõestuste saavutamine on alati tervitatav. Paraku on palju tähtsaid asju, mida me ei suuda tõestada. Ent see pole alati katastroof, kui riskime võimalike fakti- või loogikavigadega või teemegi neid.

Reductio ad absurdum

On erinevaid viise, kuidas väidet p kahtluse alla seada või seda kritiseerida (Meos 2003a: 93–103). Üks neist sai ladinakeelse nime *reductio ad absurdum* – absurdile taandamine. Väite p vääramiseks näidatakse, et temast järeldub absurd (Blackburn 2002: 377; Cryan jt 2003: 12–3).

Lähtume järgmisest reeglist: **Kui väitest *p* kehtivalt järeldub vastuolu *q ja mitte-q*, siis on ka *p* ise vastuoluline.** Seega vastuoluseaduse põhjal: Kui väitest p järeldub vastuolu, siis on p väär:

$$\frac{p \Rightarrow (q \text{ ja mitte-}q)}{\text{mitte-}p} \qquad \textbf{(1.13)}$$

Selline argument on tõestav aga vaid juhul, kui väitest p tehtav järeldus on kehtiv ja kui tulemiks on tõepoolest vastuolu ja mitte näiteks lihtsalt ennekuulmatu lause.

Sarnast arutlusvõtet kasutas juba Zenon (u 490 – 430 ema). Näitamaks, et liikumine pole võimalik, eeldas ta vastuväiteliselt, et asjad saavad liikuda ning püüdis sellest eeldusest järeldada vastuolu. Jõudnud vastuolule, järeldas ta, et liikumine pole siiski võimalik ja on vaid näiv.

1948. aastal väitlesid BBC raadiosaates Russell ja Copleston. Copleston esitas nn kausaalse Jumala olemasolu tõestuse (Russell 1979: 134): Ükski kogemusobjekt pole iseenda olemasolu põhjus. Seepärast objektide totaalsuse põhjus peab olema väljaspool neid objekte endid. Jne. – Russell (1979: 140) vastas argumendiga *reductio ad absurdum*: „Igal olemasoleval inimesel on ema ja mulle tundub, et teie argumendiks on, et seepärast peaks kogu inimkonnal olema ema..."

Argumenti (1.13) kutsutakse ka *kaudseks* ehk *vastuväiteliseks tõestuseks* (vt nt (Tamme jt 1997: 144–6) või (Meos 2003a: 93)). Tõestamaks väidet r, näitame, et väitest *mitte-r* (ühes varem juba tõestatud väidetega) järeldub vastuolu. Sellist tõestust kasutatakse matemaatikas laialdaselt.[18]

Popper (1902 –94) rajas oma filosoofia (vt nt Popper 2004) järeldusreeglile *Modus Tollens:*[19]

[16] Aksionaatilisuse ideaalist teadustes vt nt Eintalu 1998, Tarski 1965, Tarski 2000 või (Wright 1982: 27–38).

[17] Siingi on raskusi seoses nn „Gödeli teoreemiga". Vt nt (Tarski 2000: 600–605) & Uustalu 2000.

[18] Nn *olemasolu tõestuste* puhul on *intuitsionistid* ja *konstruktivistid* (XX s) kaudses tõestuses aga kahelnud. Ei piisavat tõestusest, et teatud omadustega arv *peab* olemas olema ja tulevat ka näidata, *mis* arv see täpselt on.

[19] Sellest järeldusreeglist on ilmunud eestikeelne artikkel Meos 2003b.

$$\frac{\begin{array}{l}\textit{Kui A, siis B.}\\ \textit{Mitte-B.}\end{array}}{\textit{Mitte-A.}} \qquad \textbf{(1.14)}$$

Kui eeldame, et Newtoni teooriast tuleneb planeet Merkuuri trajektoor, mis aga pole kooskõlas teleskoopidest saadud eeldatud trajektooriga, siis peame eeldama, et Newtoni teooria on väär.[20]

Arutlus (1.14) sarnaneb arutlusega (1.13) siis, kui väide *Kui A, siis B* rajaneb järeldusel $A \Rightarrow B$.

Mõnikord, kui väärate eeldustega järelduste vastu ollakse, aetakse segamini järeldus ja tõestus. Järeldus $p \Rightarrow q$ aga ei ütle, et q. Ta ütleb, et *kui* p on (oleks) tõene, *siis* q on (oleks) tõene.

Inimesed on läbi aegade teinud järeldusi, mille eeldused on väärad. Kasutades arutlusvõtet *reductio ad absurdum*, me tihti alles avastame seda, et meie eeldused olid väärad.

Meie vigade avastamisel on väärate eeldustega järeldused seega hindamatud abilised.

Järgnevalt uurime aga, kuidas ebakorrektsed järeldused aitavad meil hüpoteese esitada.

Loogika negatiivne funktsioon

Vastuoluseadus ütleb, et kõik vastuolud on väärad. Kui me teame, et väide p on vastuoluline, siis teame ka seda, et p on väär. Lähtume järgmisest negatiivsest, keelavast printsiibist:

Arukas olend peab hoiduma esitamast väidet,
mille väärus on garanteeritud. **(1.15)**

Seega oleme me ratsionaalselt kohustatud hoiduma väitmast teadaolevalt vastuolulist väidet.

Ka loogilised järeldused rajanevad vastuoluseadusele ning neilgi on keelav iselooom. Kui me teame, et $p \Rightarrow q$, siis teame, et p *ja mitte-*q on vastuolu, mille esitamist tuleb vältida.

Vaid siis, kui me *teame* nii seda, et $p \Rightarrow q$ kui ka seda, et p, on tulem q *tõestatud* ning alles nüüd nõuab printsiip (1.15), et me ei esitaks väidet *mitte-*q, mille väärus on meile juba teada.

Garantiide puudumine

Loogikud õpetavad sageli, et ebakorrektse järelduse abil väite esitamine on mõtlemisviga, mida tuleks vältida. Ent nõue sääraseid mõtteahelaid vältida ei tulene printsiibist (1.15).

Vaatleme viit võimalikku juhtumit:

1. *Ebakindlad eeldused.* Kui me teame, et $p \Rightarrow q$, aga ei tea, kas eeldus p on tõene, siis ei tea me ka seda, kas tulem q on tõene. q tõesus pole siis garanteeritud. Ent ka q väärus pole siis garanteeritud – mistõttu printsiip (1.15) ei nõua, et hoiduksime esitamast väidet q. **Kindlasti tuleb aga hoiduda väitmast, et tõestatud on väide q, mis tõestatud ei ole.** See ei sega meid aga *oletamast*, et q.
2. *Ebakindlad järeldused.* Kui me teame, et p, aga pole kindlad, kas $p \Rightarrow q$, ka siis pole q veel tõestatud. Ent ülalöeldu jääb kehtima. Nii q tõesus kui väärus on meie jaoks veel võimalikud.
3. *Väärad eeldused.* Kui me teame, et $p \Rightarrow q$, aga eeldus p on teadaolevalt väär, ka siis jääb ülalöeldu kehtima. Näiteks järelduses (1.3) oli esimene eeldus väär, aga tulem juhuslikult tõene.
4. *Mittekehtivad järeldused.* Kui me teame, et p ja et järeldus $p \Rightarrow q$ on mittekehtiv, ka siis jääb ülalöeldu kehtima. Tulem q võib osutuda nii tõeseks kui ka vääraks.[21]

---

[20] Arusaadavalt *ei tõesta* (1.14) väidet *Mitte-A* näiteks siis, kui saab kahelda astronoomilisis andmeis *Mitte-B*.

[21] Lause õpikust (Tamme jt 1997: 4) „... ei maksa looota, et ta *alati* kehtib," on siin ehk eksitav.

5. Kõik ülalöeldu jääb kehtima, kui eeldus ja järeldus mõlemad on ebakindlad ja/või vigased või koguni teadaolevalt vigased.[22]

Kõigil viiel vaadeldud juhul on garanteerimata nii tulemi q tõesus kui ka tema väärus. Kui q väärus on garanteerimata, siis printsiip (1.15) aga ei nõua, et hoiduksime esitamast väidet q. Me ei tohi küll väita, et q on *tõestatud*, ent me võime q esitada *oletusena*, *hüpoteesina.*

Muidugi võiks juhinduda ka järgmisest keeluprintsiibist:[23]

Arukas olend peab hoiduma esitamast väidet,
mille tõesus pole garanteeritud. **(1.16)**

(1.16) keelaks esitada tõestamata väidet q, isegi kui see on kuidagi järeldatud eeldusest p.

Ent printsiip (1.15) käskis vältida *teadaolevaid* vigu – sellal kui (1.16) nõuab ka vigade *võimaluse* vältimist. Tõestada suudame aga vaid vähest. Samas nõuaks (1.16) oletuste kasutamisest loobumist. Printsiip (1.16) ei tulene vastuoluseadusest. Kas teda saab kaitsta, on samuti ebaselge.

Järgnevalt uurime lähemalt mittekehtivaid järeldusi. Neid on sageli peetud loogikavigadeks. Ent sääraseid „vigu“ (ing k: *incorrect* & *invalid*) ei keela ei vastuoluseadus ega printsiip (1.15).[24]

Deduktsioon ja induktsioon[25]

„Deduktsioon“ ja „induktsioon“ on vastandlike mõistete paar (vt nt Blackburn 2002: 81 & 182–3).

Deduktsioon

Deduktsioon ehk *deduktiivne järeldus* on kehtiv järeldus. Kehtivalt järeldamine on *dedutseerimine.* Teadust, mis uurib deduktsioone, nimetatakse *deduktiivseks loogikaks.* Ent enamasti – eriti õpikutes – tähendab ka sõna „loogika“ deduktiivset loogikat, kui vastupidist pole öeldud.

Vaatleme kaht deduktsioonide omadust, mida me varem pole maininud:

1. *Deduktsioon on järeldus üldiselt üksikumale.* Näiteks deduktsioonis (1.3) „Kõik linnud on lendajad. Vares on lind. Seega vares on lendaja,“ ütleb esimene eeldus midagi *kõikide* linnuliikide kohta, tulem ütleb aga midagi vaid *ühe* linnuliigi – vareste – kohta.
2. *Deduktsioon ei lisa eeldustele uut informatsiooni.* Näiteks deduktsioonis (1.8) $(A \& B) \Rightarrow A$ on tulemiks A, mida eelduses juba väideti. Dedutseerides me vaid analüüsime juba öeldu uuele kujule ja esitame sellest mingi osa. Kant (1724 – 1804) kirjutas analüütilistest otsustustest (1982: 20): „Analüütilised otsustused väljendavad predikaadis vaid seda, mida juba tegelikult mõeldi subjekti mõistes ... pole ma oma mõistet ... vähimalgi määral avardanud, vaid üksnes lahti harutanud...“[26]

Deduktsioone kasutavad *deduktiivsed teadused* ja *aksiomaatiline meetod* (vt nt Tarski 1965 või Wright 1982: 27–38). Ent uusajal, kui teadused plahvatuslikult arenesid, seati kahtluse alla antiiksed veendumused: et teadused saavad piirduda deduktsioonidega; et loodusseadusi on võimalik kindlalt teada; ja et teadusteooriast dedutseerides saab siin midagi olulist tõestada.

---

[22] „Valedelt faktidelt ning ekslike reeglite abil ei ole võimalik teha õigeid järeldusi,“ (Tamme jt 1997: 5) on eksitav.

[23] Sarnasest printsiibist juhindus Descartes (1596 – 1650) oma *Meditatsioonides* (Descartes 1993).

[24] Kindlasti oleks aga veaks mittekehtiva järelduse pidamine kehtivaks.

[25] Käesoleva lühiülevaate kontekstis on võimatu ja ka ülearune anda kõiki täpseid kirjandusviiteid.

[26] Järeldust, mille eelduste tõesus garanteeriks tulemi tõesuse, kutsutakse mitmeti: *range järeldus, loogiline järeldus, kehtiv järeldus, deduktsioon, analüütiline otsustus.* Mõistega „analüütiline“ võib aga olla probleeme (Quine1999).

Empirism
Empiirilistes teadustes nagu füüsika on oluline roll vaatlustel ja eksperimentidel. Nende teaduste arenguga kaasnes tunnetusteoorias *empirismi* populariseerumine. Briti empiristid F. Bacon (1561 – 1626), Locke (1632 – 1704), Hume (1711 – 76) ja J. St. Mill (1806 – 73) leidsid, et meie teadmised maailma kohta saavad pärineda vaid kogemustest.

Ent vaatlusandmeid on meil alati vaid lõplik arv. Keegi pole jälginud näiteks lõputut hulka langevaid kive. Teadusteooriad esitavad aga väiteid kujul „Kõik *X*-d on *Y*-d," kus väljend „kõik" hõlmab võimalikku lõpmatust. Näiteks väites „Kõik massiga kehad tõmbuvad – kõikjal ja alati," väidame me kindlasti enam kui me eales saaksime vaadelda.

Aga deduktsioon ei lisa eeldustele uut informatsiooni. Seega: kui vaatlusandmed on esitatud eeldusväidetena, siis ei saa ükski deduktsioon neist viia tulemile, mis väidaks midagi nende sündmuste kohta, mida pole vaadeldud.

Siit resultaat, mida rõhutas juba F. Bacon: *Teadusteooriaid ei saa vaatlusandmeist dedutseerida.*

Ent kui me peame lähtuma vaid vaatlusandmeist, tuleneb siit ka, et *teadusteooriaid ei saa tõestada ega nende tõesust kindlalt teada.*

Kas tuleks loobuda katsest järeldada teooriaid vaatlusandmeist – nagu soovitas Popper (1902 – 94)? Või katsest neid vaatlusandmeist *dedutseerida?* – F. Bacon leidis 1620. a teoses *Novum Organum* (Bacon 1952), et teooriate järeldamisel vaatlusandmeist tuleb kasutada *induktsioone.*

Induktsioon
Induktsioon ehk *induktiivne järeldus* laiemas tähenduses on mis tahes mittekehtiv ehk mittededuktiivne järeldus. Enim tähelepanu on aga pööratud nn „loendavale induktsioonile".

Loendav induktsioon
Loendav induktsioon on järeldus üksikumalt üldisele ehk teisisõnu üldistus. Näiteks järeldus „Kõik *nähtud* elevandid olid valged, seega *kõik* elevandid on valged (ka need, keda tulevikus näeme)," on loendav induktsioon. Ilmselt on see järeldus tehtud vastupidises suunas deduktsioonile. Loendav induktsioon on ka *sünteetiline otsustus:* tema tulem lisab eeldustele uut informatsiooni.

Induktsiooniprobleem
Ent isegi kui vaatlusandmeist saab induktiivselt järeldada teadusteooria, pole selline järeldus teooria *tõestus.* Tõestada saab vaid deduktsiooniga, aga just induktsioon seda ei ole. Aga miks peaks ratsionaalne olend siis kasutama induktsiooni? – See küsimus on tuntud *induktsiooniprobleemi* nime all, mida kutsutakse ka *Hume'i probleemiks*, sest just Hume (1711 – 76) kirjutas sellest palju.

1739. aastal ilmunud teoses *A Treatise of Human Nature* jõudis Hume (1985) skeptilisele tulemusele, et meil polegi põhjust arvata, et induktsiooni tulem on tõene või tõenäolinegi.[27]
Tundub nii, et induktsiooniprobleemi pole tänini lahendatud.[28]

Induktiivne loogika
Induktsiooniprobleemi on püütud lahendada erinevalt – ka luues nn „induktiivset loogikat", mis annaks „heade" induktsioonide reeglid. Carnap (1891 – 1970) oma töödega oli siin teerajaja (vt nt Carnap 1951). Paraku on „induktiivsed" loogikad osutunud deduktiivseiks. Järelduste eeldustes väidetakse aga enam, kui vaatlused pakuvad. Nüüdseks on see loogika põimunud *AI* uuringute ja masinõppega. Ilmunud on õpikuid (vt nt Hacking 2001). Meie siin sellise loogikaga ei tegele.

[27] Üldiselt arvatakse, et tõenäosusteooria siin ei päästa, sest ta eeldab ilma õigustuseta seda, mille õigustamist nõuti induktsiooniprobleemis. Märgime, et Hume'i järgi pole meil ka põhjust arvata, et induktsiooni tulem on väär.
[28] Vt nt Eintalu 2001, 2003 ja 2005: 66–75 ning ka sealseid kirjandusviiteid.

Järeldus parimale seletusele
Loendavas induktsioonis „Kõik nähtud elevandid olid valged, seega kõik elevandid on valged," on algoritm küll olemas, ent alustatakse ja lõpetatakse elevantidega. Teadlased seletavad aga nähtusi, eeldades nähtamatuid aatomeid. Loendava induktsiooniga vaatlustest aatomiteni ei jõua.

Üheks viimasel ajal uuritud induktsiooniks on *järeldus parimale seletusele* (vt nt Lipton 1991). Järeldus *seletusele* oleks selline: „Kui *A*, siis *B*. *B*. Järelikult: *A*." Näiteks: „Kui vihma sadas, siis on tänavad märjad. Tänavad on märjad. Seega vihma sadas." Vihmasadu oleks siin seletus, miks tänavad on märjad. Järeldus *parimale seletusele* võrdleb aga *erinevaid* seletusi, miks *B*, ning valib neist „parima". Näiteks aatomite teooriat võidakse pidada soojusnähtuste parimaks seletuseks.

Popper (1902 – 94)
Popper väitis alates 1935 (vt Popper 2004), et teadlased ei kasuta ja ei peagi induktsioone kasutama. Nad peavad esitama – pea ükskõik, kuidas – *hüpoteese*, dedutseerima neist ennustusi ja viimaseid *testima* – vaatlustega võrdlema. Teadusteooriaid ei saa õigustada, ent võib õnnestuda neid rangetes testides väärata (vt (1.14)). On arukas kasutada teooriaid, mida pole sedasi väärata õnnestunud. – Paraku on induktsioone mõnikord kasutatud. Ja kui hüpoteesi tohib esitada ükskõik, kuidas, tohib (kuigi ei pea) teda esitada ka induktsiooni tulemina. Popper rõhutas vastuoluseadust. Ent vastuoluseadusest ja printsiibist (1.15) kummastki ei järeldu (printsiipi (1.16) Popper ei tunnistanud), et induktsiooni ei tohi kasutada. Ning kriitikud on üksmeelel, et Popperil jäi seletamata see, miks on arukas kasutada mitteväääratud teooriaid.

Nii induktsiooni tulemi tõesus kui väärus on garanteerimata ja muid võimalusi pole leitud. Me tohime, aga ei pea sellist tulemit kasutama. Deduktsiooni ja induktsiooni roll meie mõtlemises on tänini jäänud vaidlusküsimuseks (vt nt *Induction and Deduction in the Sciences* 2003).

Loogika filosoofilised tõlgendused

Kui loogikaga kokkupuutumine lugejas hämmeldust tekitab, siis olgu öeldud, et ka kuulsad loogikud ja filosoofid on olnud hämmingus, pealegi on nende vaated olnud väga erinevad.

Järgnevalt tutvustame kolme kontseptsiooni loogikast.

Psühhologism loogikas
Üks neist, kes pooldas psühhologistlikku vaadet loogikale, oli J. St. Mill (1806 – 73).[29] Milli järgi pole loogikaseadused mitte *normatiivsed* ehk ettekirjutavad (pole õige mõtlemise reeglid), vaid on *deskriptiivsed* ehk kirjeldavad. Loogikaseadused on empiirilised üldistused, mis kirjeldavad inimmõtlemise psühholoogilisi seaduspärasusi. Vastuoluseadus on psühholoogiline sund: inimmõistuse jaoks on võimatu ette kujutada olukorda, mida kirjeldab ilmutatult vastuoluline väide *A ja mitte-A*. Me ei suuda endale ette kujutada näiteks ka kandilist ringi.

Psühhologismi kritiseerisid teiste seas Husserl (1859 – 1938) ja Frege (1848 – 1925).

Husserl esitas oma kriitika 1900 – 1901 ilmunud teoses *Logische Untersuchungen* (Husserl 2001). Kui loogikaseadused on kirjeldavad, siis pole meil alust kritiseerida isikut, kes teeb loogikavigu. Saaksime vaid ütelda, et ta mõtleb meist erinevalt. Pole ka kindel, et palavikus sonija ei mõtle vastuoluliselt. Kui ütleksime, et loogikaseadused kirjeldavad „normaalse" inimese mõtlemist, siis aga kalduksime ikkagi normatiivse käsitluse juurde („Tuleb olla normaalne.").

Frege (1999: 21): „Loogikaseadusi ei saa õigustada psühholoogiliste uuringute abil."

[29] Eesti keeles saab J. St. Milli vaadetega põgusalt tutvuda: (Cryan jt 2003: 118–25).

Konventsionalism loogikas

Konventsionalism loogikas on vaade, et loogikareeglid on *konventsioonid* ehk kokkulepped nagu liikluseeskirjadki. Ainsaks üldiseks reegliks on kokkuleppe raames kokkuleppest kinni pidada. Erinevad inimesed või inimrühmad võivad juhinduda erinevatest kokkulepetest. Seetõttu on võimalikud ka erinevad loogikareeglistikud.

Säärase vaate esitas Carnap (1891 – 1970), täiendades seda „tolerantsi printsiibiga", mille järgi me ei tohiks olla sallimatud nende vastu, kes mõtlevad meist erineva loogikaga (Cryan jt 2003: 31).

Ent ka selle käsitluse puhul pole meil alust kritiseerida neid, kes teevad loogikavigu. Parimal juhul saaksime kritiseerida neid, kes omaenda reegleid rikuvad – nagu vargaid, kes rikuvad vargamoraali. On ka kaheldav, kas on arukas või võimalik olla „loogiliste hälvikute" suhtes alati tolerantne. Mõni „oma loogikaga" terrorist või skisofreenik võib ju lausa eluohtlik olla. Lõpuks, vastuoluseadus – loogika põhireegel – on iga kokkuleppe aluseks ja pole seega ise kokkulepe. Kes vastuoluseadust ei tunnista, see ei pruugi ju kinni pidada ühestki kokkuleppest.[30]

Objektivism loogikas

Objektivistlik käsitlus loogikast leiab, et loogikaseadused kehtivad objektiivselt, meist sõltumatult. Väidete vahel on objektiivsed seosed olenemata sellest, kas me neid märkame või mitte. Loogikaseadused on seetõttu kõikjal ja kõigi jaoks ühesugused. – See käsitlus on ühtlasi *normatiivne* ehk ettekirjutav: ta kehtestab õige mõtlemise reeglid. Kui tahame olla ratsionaalsed olendid, siis peame vältima eitamast neid objektiivseid seoseid, mis väidete vahel on.

Sarnast vaadet on teiste seas toetanud Husserl (1859 – 1938), Frege (1848 – 1925) ja Russell (1872 – 1970).

Sarnasest vaatest oleme lähtunud ka käesolevas õpikus. Ent selle vaate kitsaskohaks on propositsioonide olemasolu küsimus. Kuigi oleme siin vältinud terminit „propositsioon" ja oleme rääkinud lihtsalt väidetest, puudutab see küsimus ehk meidki.

Kirjandust

Cryan jt (2003) *Juhatus loogikasse.* Tln: KOGE.

Frege (1999) „17 põhilauset loogikale (1876/77)." *Tähendus, tõde, meetod. Tekste analüütilisest filosoofiast. I.* Toim. J. Kangilaski & M. Laasberg (Tartu: TÜ Kirjastus), lk 20–21.

Grauberg (1996) „Loogika aine ja selle tähtsus." Tema raamatus *Loogika, keel ja mõtlemine* (Tln: Tallinna Bakalaureuse Erakool), lk 5–26.

Meos (2003a) *Loogika, argumentatsioon, mõtlemiskultuur.* Tln: Koolibri.

Tamme jt. (1997) *Loogika. Mõtlemisest tõestamiseni.* Tartu: TÜ Kirjastus.
– Siit peatükid: „1.1. Loogika aine" (lk 1–19) & „2. Loogika põhimõisted" (lk 55–64).

Wright (1982) *Logiikka, filosofia ja kieli* (Keuruu: Kustannusosakeyhtio Otavan painolaitokset), lk 1–125.

Wright (2001b) „Vorm ja sisu loogikas." Tema raamatus *Filosoofia, loogika, normid* (Tln: Vagabund), lk 31–58.

Зегет (1985) *Элементарная логика* (М: Высшая школа), сс 14–39.

[30] Vt ka minu sarnaseid argumente (Cryan jt 2003: 180–81).

2. LOOGIKA AJALOOST

Loogika ajaloost ja -harudest

Antiik-Kreeka mõtlejat Aristotelest (384 – 322 ema) peetakse loogikateaduse rajajaks. Kindlasti tunti ja kasutati mõningaid loogikareegleid juba enne Aristotelest. Kuid Aristoteles oli esimene, kes rajas loogika süsteemse teadusena.31 Kuigi sõna “loogika” pärineb kreeka keelest, Aristoteles ise oma õpetust selle nimega ei kutsunud. Aristotelese rohkeid loogikaalaseid mõtteid, mis on kohati üsna keerukad, võib leida näiteks tema kirjutistest *Kategooriad*, *Tõlgendamisest* ja *Esimene analüütika* (Aristotle 1995a, 1995b ja 1995c).

Osa Aristotelese uurimustest olid üldarusaadavamad ning need jäid aastatuhandeiks loogikaõpetuse nurgakiviks. Seda osa Aristotelese uurimustest tuntaksegi nime all *Aristotelese loogika.*

Aristotelese loogikat ning selle edasiarendusi kutsutakse ka nimega *traditsiooniline loogika.* Kuni XIX sajandi keskpaigani oligi see pea ainus loogika, mida üldiselt tunti.32 Traditsioonilist loogikat õpetatakse veel tänapäevalgi mõnedes kateedrites.

XIX sajandi keskpaiku hakkas arenema *kaasaegne loogika*, mis tunneb rohkem loogikareegleid kui Aristotelese loogika. Kaasaegset loogikat kutsutakse ka *matemaatiliseks loogikaks* või *sümbolloogikaks*, sest selles kasutatakse matemaatika sümboleile sarnanevaid sümboleid.

Kaasaegne loogika rajati paljude autorite poolt. Mainime neist kahte. Boole (1815 – 64) kasutas oma 1847. aastal ilmunud teoses *Loogika matemaatiline analüüs* loogiliste järelduste arvutamisel matemaatikast tuttavaid meetodeid (nn *Boole'i algebra*). Frege (1848 – 1925) esitas oma teoses *Mõistekiri* (1879) paljud kaasaegse loogika elemendid. Teoses *Aritmeetika alused* (1884) püüdis ta aga matemaatikat taandada loogikale (nn *logitsism*).

Kaasaegset loogikat jaotatakse *klassikaliseks loogikaks* ja arvukateks *mitteklassikalisteks loogikateks.*

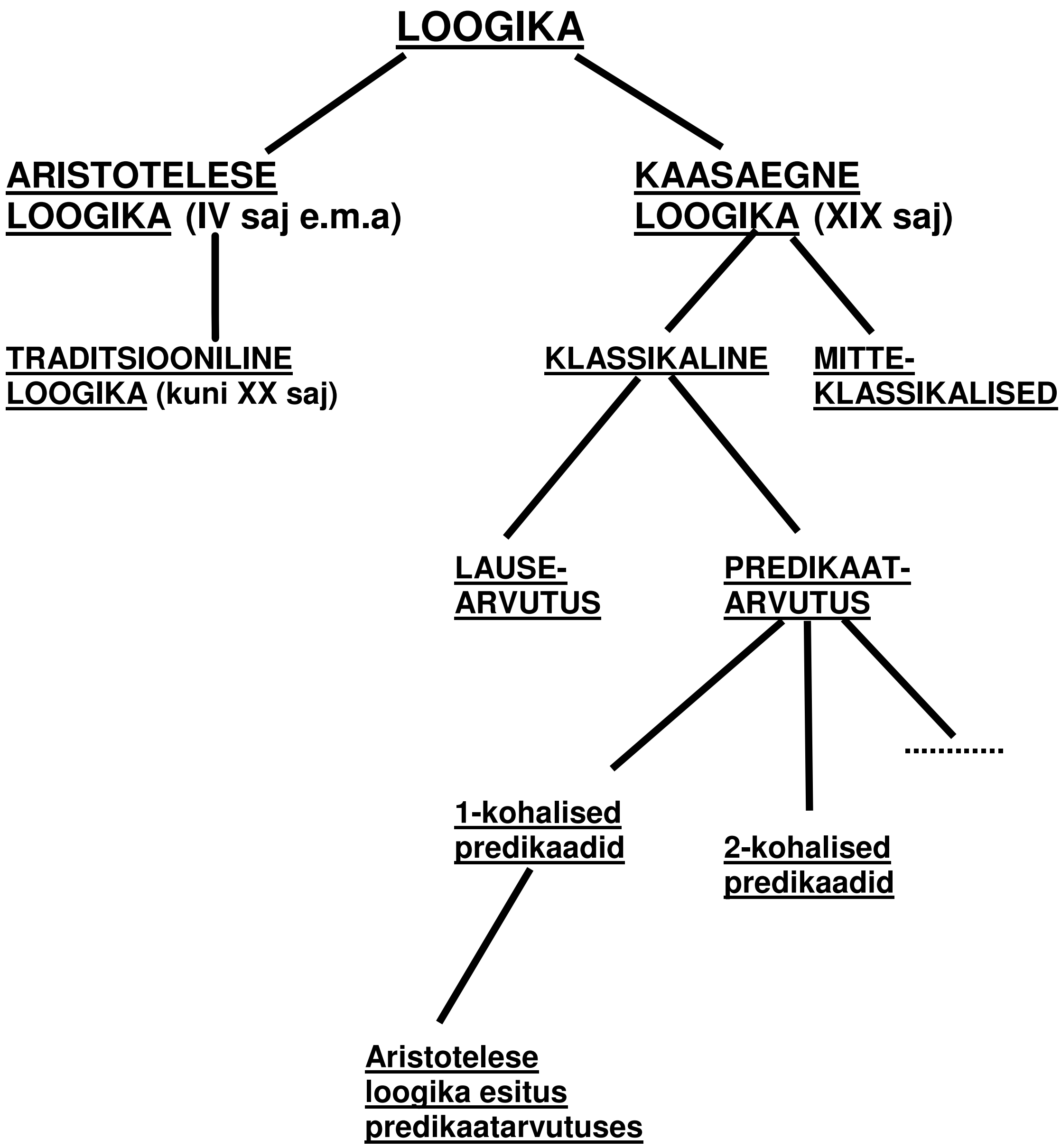
Klassikaline loogika peab kinni Aristotelese *kolmest põhiseadusest*, millest lähemalt räägime allpool. Mitteklassikalised loogikad aga, mida on arendatud XX sajandil, kas rikuvad mõnda neist kolmest põhiseadusest või siis tegelevad küsimustega, mida varem polnud põhjalikult uuritud. Seejuures on nii mõnegi mitteklassikalise loogika juuri leitud juba antiikajast, kaasaarvatud Aristotelese enda kirjutistest.

Kaasaegse loogika klassikaline osa koosneb *lausearvutusest* ja *predikaatarvutusest.* Aristotelese loogikat on võimalik (mõningate mööndustega) näha predikaatarvutuse ühe alamharuna.

Vaata ka *Joonist 1* järgmisel leheküljel.

[31] Ka Eukleides (u 300 ema) on mitte geomeetriareeglite leiutaja, vaid esimese süsteemse geomeetriateooria rajaja.

[32] Kuid omaette küsimus on see, millist osa Aristotelese tekstidest ning millal ja kus keskajal õieti tunti. Mõned Aristotelese tekstid tõlgiti ladina keelde ju alles pärast ristisõdasid XI sajandil.



JOONIS 1
Loogika ajaloo ja -harude skeem

Mõtlemise kolm põhiseadust

Aristoteles rajab oma loogika *kolmele põhiseadusele:*

1. Samasuse seadus;
2. Vastuoluseadus;
3. Välistatud kolmanda seadus.

SAMASUSE SEADUS nõuab järgmist:

Ühe arutluse vältel ei tohi märkide, sõnade ja fraaside tähendused muutuda.
Igal sõnal peab kogu arutluse vältel olema üks ja see sama tähendus.

Tänapäeval võiks seda reeglit nimetada semantiliseks (ehk tähendusteoreetiliseks) reegliks.

Samasuse seaduse rikkumist on peetud näiteks poliitilise demagoogia üheks põhivõtteks.

Saab näidata, et kui arutlus rikub samasuse seadust, siis on säärase arutluse abil võimalik "tõestada" ükskõik, mida (näiteks seda, et te istute praegu Kuu peal).

Näitena vaatleme matemaatilist arvutust. Juku tähistab $a = \sqrt{(x + 1)}$. Ta jätkab arvutust. Mõne aja pärast tähistab ta $a = \sqrt{x}$. Ta jätkab arvutust ja jõuab absurdsele tulemusele $1 = 0$. – Sellist viga võimaldas asjaolu, et märk a tähistas ühes ja samas arvutuses mitut erinevat asja.

Teiseks vaatleme arutlust: *Kõik eestlased elavad Eestis. Väliseestlased on eestlased. Mõned väliseestlased elavad Kanadas. Seega mõned eestlased elavad Eestis ja Kanadas.* – Selles vigases arutluses tähistas väljend "eestlane" kaht asja: 1) eesti rahvusest isikut; 2) Eestis elavat isikut.

Kui ühel sõnal on mitu erinevat tähendust, siis soovitab Aristoteles kasutusele võtta mitu erinevat sõna, et neid tähendusi omavahel mitte segi ajada. Aristoteles kirjutab oma teoses *Metafüüsika* [IV raamat, §4, lõik 1006b 1–5] (Aristotle 1995d: 1589):[33]

> Ja see ei muudaks midagi, kui keegi teataks, et sõnal on mitmeid tähendusi, sest kui neid on siiski lõplik arv, saab igale neist omistada erineva sõna ... igale tähendusele saab omistada spetsiaalse nime.

Viimases näites ülalt sobiks kasutada järgmisi sõnu: "eestlane" – tähistamaks rahvust; ja "eestimaalane" – tähistamaks alalist elukohta.

Samasuse seadust on rikutud ka siis, kui kaks erinevat fraasi on loetud samatähenduslikuks, kuigi nad seda pole. Samuti on samasuse seadust rikutud, kui kõneleja mõtleb oma sõnadega üht asja, kuulajad aga teist asja. See võib viia vääritimõistmisele.[34]

Kindlasti on samasuse seadus väga oluline juuras, seadusloomes ja seaduste rakendamisel.

VASTUOLUSEADUS ütleb:

Kõik vastuolulised väited (mõtted, arutlused) on väärad.
Vastuoluline väide ehk vastuolu jaatab ja eitab üht ja sama asja korraga.

Vastuoluseadust käsitlesime põhjalikumalt eelmises peatükis.

Aristoteles sõnastab vastuoluseaduse mitte seadusena väidete kohta, vaid seadusena maailma kohta: Ükski asi ei saa korraga olla ja mitte olla. Kohati sõnastab ta vastuoluseaduse samas lauses

[33] Kreekakeelset autorit Aristotelest olen siin eestindanud inglise keelest.

[34] Pärast nn „Lihula lahingut" 2004. a rikuti samasuse seadust Siseministeeriumi ja ajakirjanduse kommunikatsioonis, kui väljendist „politsei erivahendid" sai lõpuks siiski väljend „erilised politsei (eri-)vahendid."

samasuse seadusega. *Metafüüsika* [IV raamat, §3, lõik 1005b 15–20] (Aristotle 1995d: 1588):

> ... samal atribuudil pole võimalik korraga kuuluda ja mitte kuuluda samale subjektile samas mõttes...

Tõene lause saab vastuoluseadust rikkuda vaid näiliselt – kui lause rikub samasuse seadust. *Metafüüsika* [IV raamat, §4, lõik 1006b 15] (Aristotle 1995d: 1589):

> Ja sama asi ei saa korraga olla ja mitte olla, väljaarvatud mitmemõttelisuse süül...

Vastuoluseadust peab Aristoteles lihtsaimaks, ilmseimaks ja kindlaimaks printsiibiks, mis on kõigi teiste printsiipide aluseks (*Metafüüsika*, IV raamat, §3).

VÄLISTATUD KOLMANDA SEADUS ütleb:[35]

Iga väide on kas tõene või väär ja pole mingit kolmandat võimalust.

Aristoteles, *Metafüüsika* [IV raamat, §7, lõik 1011b 25] (Aristotle 1995d: 1597):

> ... ei saa olemas olla vastuolu pooluste vahepealset ja ühele subjektile peame mis tahes predikaadi kas omistama või seda predikaati eitama.

Aristoteles tahab siin ütelda vaid seda, et tõene on kas väide "*a* on *B*" või siis eelmise väite eitus – "Pole tõsi, et *a* on *B*." Pole mingit muud, vahepealset võimalust.

Kui väide pole läbinisti tõene, siis loetakse ta vääraks. Vääras väites võib olla kas vähe või ka palju tõest informatsiooni, kuid kindlasti sisaldab ta mingi koguse väärinformatsiooni. Seega on "vahepealsed" võimalused küll olemas, kuid mitte väite tõesuse või vääruse seisukohalt.

Välistatud kolmanda seaduse piirid

Välistatud kolmanda seadus teeb klassikalise loogika *kahevalentseks* (iga väide on 1. *tõene* või 2. *väär*) ja võimaldab nn digitaalsüsteemi.

Välistatud kolmanda seadusele on siiski ehk erandeid, mida märkas juba Aristoteles.

Teoses *Tõlgendamisest*, §9 (Aristotle 1995b: 28–30) esitas Aristoteles nn *Salamise merelahingu probleemi*, milles käsitles väiteid tulevikusündmuste kohta – *ennustusi.*[36] Aristoteles leidis, et pole võimalik, et kõik väited tuleviku kohta oleks tõesed või väärad juba väitmise hetkel – vastasel korral oleks tulevik (isegi kui me tulevikku ette ei tea) determineeritud ehk ettemääratud. Siis poleks meie võimuses enam midagi mõjutada. Siis poleks ka juhust. Aristoteles seletas, et olevik on olemas tegelikult, mõned tulevikusündmused on praegu aga olemas vaid võimalikult. Välistatud kolmanda seadus kehtibki vaid tegelikult olevale – seega peamiselt olevikule ja minevikule.

See antiikfilosoofi mõte unustati ära. Alles pärast 1918. aastat võttis Lukasiewicz (1878 – 1956) Aristotelest tõsiselt ja esitas *kolmevalentse loogika* (iga väide on tõeväärtusega 1. *tõene*; 2. *väär*; või 3. *mittemääratud*). See oli üks põhjus, miks hakkas arenema kaasaegse loogika mitteklassikaline haru nimega *mitmevalentsed loogikad.*

---

[35] Inglise k kutsutakse seda „välistatud keskmise seaduseks“: *the law of excluded middle.*

[36] Eesti k vt sellest probleemist Wright 2001c ja lühidalt (Eintalu 2005: 35).

Rescher (1998: 71) nendib, et Suurbritannias on keelatud kohtuasjades tõlgendada ennustusi nõnda, nagu oleks nad olnud tõesed või väärad juba ennustamise hetkel.

Välistatud kolmanda seadusega on pahuksis olnud ka *intuitsionistid* ja *konstruktivistid.*

Loogiline ruut

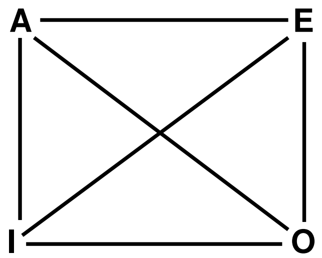
Aristoteles kasutab oma loogikas nelja tüüpi lauseid, mille traditsiooniliseks tähistuseks on saanud vastavalt tähed *A*, *E*, *I* ja *O:*

A – üldjaatav lause;
E – üldeitav lause;
I – osajaatav lause;
O – osaeitav lause.

Näiteks:

A – Kõik varesed on mustad.
E – Ükski vares pole must (st Iga vares on mitte-must).
I – Mõni vares on must (st Vähemalt üks vares on must).
O – Mõni vares pole must (st Vähemalt üks vares on mitte-must).

XI sajandil leiutas munk Psellos nn *loogilise ruudu,* mille abil on mugav kirjeldada nende lausetüüpide vahelisi seoseid (vt *Joonist 2* allpool):



JOONIS 2
Loogiline ruut

Piki ruudu külgi ülevalt alla saab **loogiliselt järeldada.**

Kui *A* on tõene, siis on vältimatult tõene ka *I.* (Kui kõik varesed on mustad, siis kindlasti on vähemalt üks vares must.) Kui *E* on tõene, siis on vältimatult tõene ka *O.* (Kui ükski vares pole must, siis kindlasti on vähemalt üks vares mitte-must.)

Alt ülesse rangelt järeldada ei saa. Näiteks sellest, et leidub mõni must vares, ei tulene veel vältimatult, et kõik varesed ilma eranditeta on mustad.[37]

Ruudu diagonaale pidi saame väited, mis on vastastikku **teineteise eitused** ja moodustavad seetõttu **ilmutatult vastuolulise lausetepaari.**

[37] Järeldus alt ülesse on siin mitte deduktsioon, vaid loendav induktsioon. Vt eelmist peatükki.

A on *O* eitus ja *O* on *A* eitus. Seega lause “*A* ja *O*” on vastuolu. (Ütelda: “See pole tõsi, et kõik varesed on mustad,” on sama, mis ütelda: “Vähemalt üks vares on mitte-must.”) Analoogiliselt, *E* on *I* eitus ja *I* on *E* eitus. Seega lause “*E* ja *I*” on vastuolu. (Ütelda “See pole tõsi, et ükski vares pole must,” on sama, mis ütelda: “Vähemalt üks vares on must.”)

Ruudu ülemist külge pidi saame aga nn **vastandid** *A* ja *E.*

Tõsi, ka väited *A* ja *E* moodustavad *vastuolu* (ingl k: *contradiction*): kui üks on tõene, siis teine on ju väär. Kuid nad eitavad teineteist maksimaalselt – olles teineteise *vastandid* (ingl k: *contraries*).

Tõepoolest: kui üks väidab, et kõik varesed on mustad, teine aga väidab, et kõik varesed on valged (ja seega mitte-mustad), siis kumbki eitab teise väite kogu sisu, pidades seda väidet mitte ainult vääraks, vaid vääraks igas viimases kui üksikasjas.

Välistatud kolmanda seadus kehtib ainult ruudu diagonaale pidi. Tõene on kas *A* või *O.* Kolmandat võimalust ei ole. Samuti: tõene on kas *E* või *I.* Kolmandat võimalust ei ole.

Välistatud kolmanda seadus ruudu ülemist külge pidi ei kehti. On täiesti võimalik, et *A* ja *E* on mõlemad väärad. Näiteks on kooskõlaline eitada nii väidet *Kõik varesed on mustad* kui ka väidet *Ükski vares pole must.* On ju vastuoludeta võimalik vahepealne olukord, milles mõned varesed on mustad ja mõned on mitte-mustad.

Nii selgitas Aristoteles teoses *Tõlgendamisest* [§7, lõigud 17b 1 – 18a 10] (Aristotle 1995b: 27–8).

Samal põhjusel ei anna ruudu alumine külg mingit loogilist seost. On ju täiesti mõeldav selline olukord, kus mõned varesed on mustad ja mõned on mitte-mustad.

Süllogismid

Kolmele põhiseadusele rajab Aristoteles oma süsteemi loogilistest järeldustest, mida kutsutakse *süllogismideks.*[38] Süllogisme on palju. Nendega tegelev teooria on *süllogistika.* Kõik süllogismid on kehtivad järeldused.

Toome klassikalise näite süllogismist nimega BARBARA:

Kõik inimesed on surelikud.
Sokrates on inimene. **(2.1)**
Sokrates on surelik.

Siin joone peal on järelduse *eeldused.* Kõikidel süllogismidel on kaks eeldust. Joone all on järelduse *tulem.* Tulem on see, mis eeldustest järeldub. Kui kõik inimesed on surelikud ja kui Sokrates on inimene, siis järelikult on Sokrates surelik. Antud eelduste korral ei saa me seda tulemit eitada, sattumata vastuollu juba eeldatuga.

Igal süllogismil on vähemalt üks eeldus kas üldjaatav või siis üldeitav lause. Toodud näites (2.1) on üks eeldus üldjaatav lause, mis algab väljendiga “kõik” ja sisaldab väljendit “on”.

[38] Vt tema *Esimene analüütika* (Aristotle 1995c).

Toome ka kaks näidet süllogismidest, mis sisaldavad üldeitavat eeldust:

Ükski kala pole imetaja.
Kõik karud on imetajad. **(2.2)**
Ükski karu pole kala.

Ükski kala pole imetaja.
Mõned imetajad on karud. **(2.3)**
Mõned karud pole kalad.

Kui süllogismi üks eeldus ütleb midagi üksiku subjekti (näiteks Sokrates) kohta, teeb seda ka tulem. Kui süllogismi üks eeldus on väljendiga "mõned", on seda ka tulem. Kui süllogismi mõlemad eeldused on üldised (väljendiga "kõik" või "ükski") on seda ka tulem. Kui süllogismi mõlemad eeldused on jaatavad, on seda ka tulem. Kui süllogismi mõni eeldus on eitav (näiteks väljendiga "mitte"), on seda ka tulem.

Kõikidel süllogismidel on **kesktermin** – see on omadus, mõiste, liik või hulk, mida mainitakse mõlemas eelduses. Süllogismis BARBARA (2.1) ülalt on selleks terminiks *inimene.* Järelduse tulemis keskterminit aga kunagi ei esine. Süllogismides (2.2) ja (2.3) on mõlemas keskterminiks *imetaja*, mis samuti tulemist välja langes.

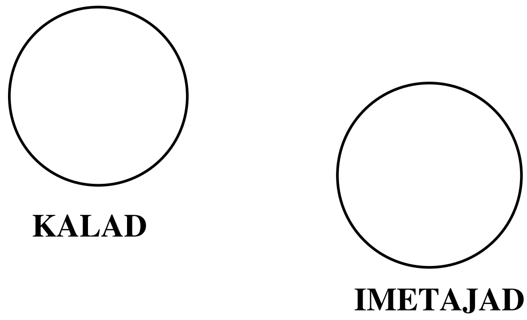
Vanamoodne rehkenduskunst
Süllogistika – nii nagu Aristoteles ja tema järgijad seda esitasid – on väga mahukas ja keerukas teooria. Süllogisme on palju, nad jaotatakse mitmesugustesse rühmadesse ja seejärel veel alamrühmadesse (nn *moodused* ja *figuurid*). Et selle teooria abil otsustada, milline järeldus siis on õigesti tehtud, tuleb traditsioonilise loogika õpikus tabeleist näpuga järge vedada ja tähelepanelikult silmitseda kummalisi diagramme. Seejuures reeglistik, mille alusel otsustada, kas järeldus kehtib või mitte, on üsna bürokraatlik ja arusaamatu. Tabeleist uurides saan küll lugeda, kas järeldus on range, ei saa aga sugugi aru, miks. Vaevalt, et selline tehnika õpetab loogiliselt mõtlema.

Euleri diagrammid

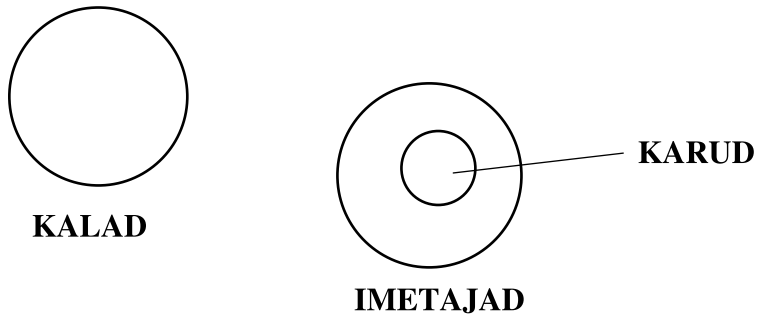
Tänapäeval on matemaatika- ja loogikateadus juba edasi arenenud ja praegu oleks ülearune nõuda õppijailt, et nad tunneksid kõiki neid detaile, mida kohmakas süllogistikas käsitletakse.

Geniaalne matemaatik Euler (1707–1783) leiutas nn *Euleri diagrammid*, mille abil saab Aristotelese stiilis järelduste kehtivust kontrollida. Seejärel on matemaatikud ja loogikud leiutanud veel ka *hulgateooria.* Sisuliselt ongi Aristotelese süllogismid hulgateoreetilised seosed. Kuidas kiiresti kindlaks teha, kas mõni esitatud järeldus kehtib või mitte? – Selleks võib kasutada Euleri diagramme või nende modifikatsioone, sisuliselt hulgateoreetilisi jooniseid.

Näitena ülalvaadeldud süllogism (2.2) kaladest. Esimene eeldus ütleb, et ükski kala pole imetaja. Seega kalade territooriumil ja imetajate territooriumil puudub ühisosa:



Teine eeldus ütleb, et kõik karud on imetajad. Seega karude territoorium ei ulatu välja imetajate territooriumilt (vt *Joonis 3* allpool):



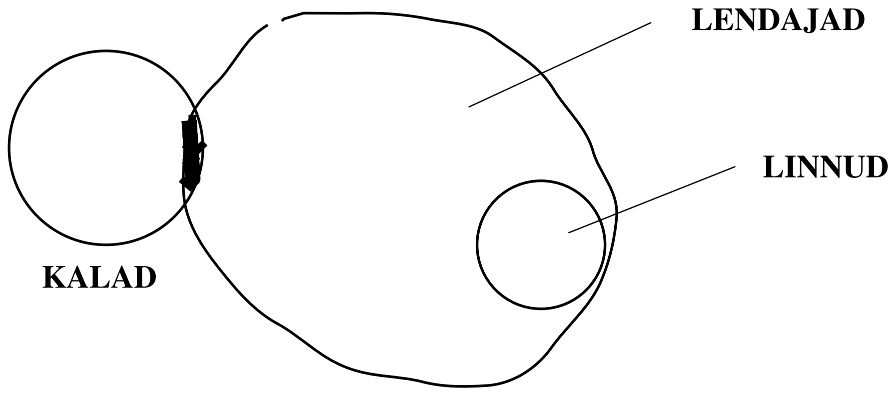
JOONIS 3
Euleri diagramm kehtivale järeldusele (2.2)

Kuidas me ka ei püüaks, aga antud eelduste korral ei ole meil võimalik diagrammi joonistada nõnda, et karude territooriumil ja kalade territooriumil oleks mittetühi ühisosa. See näitabki, et saame rangelt järeldada, et ükski karu pole kala.

Toome ka näite ühest mittekehtivast järeldusest:

Ükski kala pole lind.
Kõik linnud on lendajad. **(2.4)**
Ükski kala pole lendaja.

Antud järelduse eeldustega poleks vastuolus säärane diagramm (vt *Joonis 4* allpool):



JOONIS 4
Euleri diagramm mittekehtivale järeldusele (2.4)

Ülal oleme sodinud musta värviga seda ühist piirkonda, kuhu kuuluvad nii kalad kui ka lendajad. Et see piirkond on tehniliselt võimalik, näitabki meile, et antud järeldus pole loogiliselt range.[39]

Süllogismis BARBARA (2.1) ülalt ütles teine eeldus midagi vaid ühe subjekti – nimelt Sokratese – kohta. Diagrammil võib sellise üksiku subjekti nagu Sokrates märkida punktiga.

Võimalik segadus olemasolu eeldusega

Aristotelese süllogismide uurimisel kaasaja loogika ja matemaatika valguses tuleb aga igaks juhuks tähelepanelik olla seoses võimaliku *olemasolu eeldusega.*

Aristoteles eristas *deduktsiooni* – kehtivat järeldust; ja *demonstratsiooni* – kehtivat järeldust, millega saab teoreemi tõestada, lähtudes põhitõest ehk *aksioomist.*[40] Aksioomid käivad aga *universaalide* (liikide) kohta. Ent Aristotelese järgi **universaalid on alati mõne indiviidi poolt esindatud.**[41] Nii ei saaks kasutada näiteks eeldust kentauride kohta, sest kentaure pole olemas.

Formaalloogikas tuleb kõik eeldused avalikult välja kirjutada. Kui aga tõesti eeldada, et kõnealune liik ei moodusta tühja hulka (mille pindala Euleri diagrammil oleks null), siis tuleb ka see eeldus eraldi välja kirjutada. Nii võib aga juhtuda, et mõnel Aristotelese süllogismil on siiski mitte kaks, vaid kolm eeldust.[42]

Ülesandeid

1. Millistl loogikareeglit on arutluses rikutud?
   1.1. Pesemata inimesed on mustad. Kõik mustad on pärit Aafrikast. Seega pesemata inimesed on pärit Aafrikast.
   1.2. See hüpoteetiline elementaarosake kaalub iseendast kaks korda rohkem.

[39] See, et antud eelduste puhul saab diagrammi joonistada ka nii, et kalade ja lendajate territooriumil pole ühisosa, ei näita järelduse kehtivust. Näitamaks järelduse kehtivust, peame näitama, et tulem on siin tõene *ilma eranditeta.*

[40] Vt nt *Esimene analüütika*, I raamat, §4, lõik 25b 25–30 (Aristotle 1995c: 41).

[41] Vt nt *Kategooriad*, §5, lõik 2a 35 – 2b 5 (Aristotle 1995a: 5).

[42] See küsimus on minu jaoks segane. Ma pole näinud selleteemalist uurimust, küll aga olen raamatuist mõnikord leidnud siin vigu. Mõned eksperdid on mulle rääkinud, et Aristotelese loogikat siiski ei saa täielikult samastada ühekohaliste predikaatide arvutusega kaasaegsest loogikast. Vastavaid artikleid ei leidnud ma enam ülesse.

2. Milline järeldus kehtib, milline mitte?

   2.1. Kõik linnud on lendajad. Emud pole lendajad. Seega emud pole linnud.

   2.2. Kõik linnud on lendajad. Seega mõned linnud on lendajad.

   2.3. Kõik elevandid on lendajad. Kõikidel lendajatel on lont. Seega kõikidel elevantidel on lont.

   2.4. Mõned loomad on lendajad. Mõned loomad on ujujad. Seega mõned lendajad on ujujad.

   2.5. Mitte keegi ei tea kõike. Seega pole tõsi, et mõni teab kõike.

   2.6. See pole tõsi, et kõik on ausad. Seega mitte keegi pole aus.

   2.7. Kõik kalad oskavad ujuda. Felix ei oska ujuda. Seega Felix pole kala.

3. Millised eelmise ülesande järeldustest olid Aristotelese süllogismid?

Kirjandust[43]

Cryan jt (2003) *Juhatus loogikasse.* Tln: KOGE.

Dipert (1998) „Logic in the 19th Century." In *Routledge Encyclopedia of Philosophy, Vol. 5.* Gen. ed. E. Craig (London & NY: Routledge), pp 722–9.

Eintalu (2006) „Aristotelese loogika." Tema raamatus *Loogika näidisülesanded ja harjutused* (Tln: Sisekaitseakadeemia), lk 3–14.

Moore (1998) „Logic in the Early 20th Century." In *Routledge Encyclopedia of Philosophy, Vol. 5.* Gen. ed. E. Craig (London & NY: Routledge), pp 729–38.

Passmore (1978) „New Developments in Logic." In his *A Hundred Years of Philosophy* (Harmondsworth, etc: Penguin Books), pp 120–55.

Russell (2005) „Aristotle's Logic." In his *History of Western Philosophy* (London & NY: Routledge), pp 188–94.

Tamme jt. (1997) „Loogika ajalugu." Nende raamatus *Loogika. Mõtlemisest tõestamiseni* (Tartu: TÜ Kirjastus), lk. 19–51.

Thom (1998) „Logic, Ancient." In *Routledge Encyclopedia of Philosophy, Vol. 5.* Gen. ed. E. Craig (London & NY: Routledge), pp 687–93.

Vuks (1999) „Formaalse loogika aine ja arenemise ajalugu." Tema raamatus *Traditsiooniline formaalne loogika* (Tartu: Sihtasutus Iuridicum), lk 9–12.

Wright (1982) *Logiikka, filosofia ja kieli* (Keuruu: Kustannusosakeyhtio Otavan painolaitokset), lk 1–125.

Wright (2001b) „Vorm ja sisu loogikas." Tema raamatus *Filosoofia, loogika, normid* (Tln: Vagabund), lk 31–58.

Зегет (1985) *Элементарная логика* (М: Высшая школа), сс 161–3.

[43] Eesti õpikutest keskenduvad traditsioonilisele loogikale nt: Grauberg 1989, Grauberg 1996, Lilleorg 1999 & Vuks 1999. Piisavalt käsitleb traditsioonilise loogika teemasid ka Meos 2003. a.

3. LAUSEARVUTUS

Järgnevalt asume uurima matemaatilist loogikat ja nimelt selle klassikalist osa. Käesolevas peatükis vaatleme *lausearvutust* (lühidalt: *LA*), mille täpsem nimi on *väitearvutus* või *propositsioonarvutus.* Lausearvutus on kaasaegse loogika vundament, millele rajatakse predikaatarvutus.

3.1. Tehted lausetega

A, *B*, *C*, jne tähistagu väiteid (propositsioone). Näiteks võime tähistada[44]:

A – Bush on USA president.

Klassikaline loogika on *kahevalentne* ehk *2*-väärtuseline. Iga väide on kas tõene või väär, ilma kolmanda võimaluseta (seejuures ükski väide pole korraga nii tõene kui väär).

Loogikud ütlevad, et iga väite *tõeväärtuseks* on kas "tõene" või "väär". Kasutatakse lühendeid:

***tõene – t* (või *1*)**
***väär – v* (või *0*)**

Näiteks väite *Napoleon on USA president* tõeväärtus on *v.*

LOOGIKATEHTEID[45]

Negatsioon: ~*A* ehk: *Mitte-A.* ("*A* on väär.")
(loogiline eitus)

Konjunktsioon: *A & B* ehk: *A ja B.* ("*A* ja *B* mõlemad on tõesed.")
(loogiline "ja")

Disjunktsioon[46] : *A v B* ehk: *A või B.* ("*A* või *B* või mõlemad on tõesed.")
(loogiline "või")

Implikatsioon[47]: $A \rightarrow B$ ehk: *A*-st implitseerub *B.* ("*A* on väär või *B* on tõene.")

Loetakse: "Kui *A*, siis *B.*" Siiski *implikatsioon* pole täpselt sama asi mis *konditsionaal* ehk "kui...siis..." lause (vt ka (Guttenplan 1986: 59–60)).[48]

Ekvivalents: $A \leftrightarrow B$ ehk: *A* parajasti siis, kui *B.*

("*A* ja *B* on mõlemad tõesed või mõlemad väärad," "*A* ja *B* on ekvivalentsed," "*A*-l ja *B*-l on ühesugused tõeväärtused.")

Kui alustati väidetest (nn *komponentväidetest*), siis on loogikatehte tulemuseks samuti väide. Näiteks: kui *A* on väide ja *B* on väide, siis on ka *(A & B)* väide.

Loogikatehte tulemusena saadud väite tõeväärtus peab olema *täielikult* määratud komponentväidete tõeväärtustega.

[44] Kui tegu on konkreetsete väidetega, tuleb märkide *A*, *B*, *C*, jne tähendused täpselt välja kirjutada.
[45] Erinevais raamatuis on neid tehteid tähistatud erinevate märkidega.
[46] Disjunktsioon on *mittevälistav* „või": väites *(A v B)*, ei välista me võimalust, et *A* ja *B* on mõlemad tõesed.
[47] Implikatsioon on siinvaadeldavaist tehteist ainus, mis pole sümmeetriline: $(A \rightarrow B) \neq (B \rightarrow A)$.
[48] $(A \rightarrow B)$ väidab, et *A* on kas väär (millisel juhul *B* kohta midagi ei öelda), või kui *A* on tõene, siis on *B* tõene.

Näiteks *(A & B)* tõeväärtuse teadmiseks piisab *A* ja *B* tõeväärtuste teadmisest, ja midagi muud (näiteks *A* ja *B* tähendusi) polegi enam vaja teada – seega konjunktsioon *&* on loogikatehe.

Aga näiteks lause "*B*, sest et *A*," puhul võin ma küll teada, et *A* ja *B* on mõlemad tõesed, ent ikka veel ei pruugi ma teada seda, kas väites *A* kirjeldatud sündmus tõesti põhjustas väites *B* kirjeldatud sündmuse. Selle üle otsustamiseks oleks tarvis ka lisainformatsiooni põhjus-tagajärg seoste kohta. – Seega "... sest et ..." ei ole loogikatehe.

Näiteid loogikatehteist

Tähistagu märgid *A* ja *B* järgmisi väiteid:

A – Ahi köeb.
B – Päike soojendab tuba.

Siis võime väidetest *A* ja *B* loogikatehete abil moodustada järgmisi väiteid:

~A	–	*Ahi ei köe.*[49]
A & B	–	*Ahi köeb ja päike soojendab tuba.* ("Miks siin nii palav on?" – "Sest et ahi köeb ja päike soojendab tuba.")
A v B	–	*Ahi köeb või päike soojendab tuba (või mõlemat).* *Ahi köeb ja/või päike soojendab tuba.* ("Miks tuba külm ei ole?" – "Ju siis keegi küttis ahju või soojendas päike tuba, aga võib olla soojendasid tuba nii ahi kui ka päike.")

Tähistagu märgid *C ja D* järgmisi väiteid:

C – Trammirööbas kuumeneb.
D – Trammirööbas pikeneb.

Siis võime neist komponentväidetest moodustada järgmisi väiteid:

C→D	–	*Kui trammirööbas kuumeneb, siis ta pikeneb.* TÄPSEMALT: *Trammirööbas ei kuumene või ta pikeneb.* *(Trammirööbas kas ei kuumene, või kui ta kuumeneb, siis ta pikeneb.)*
C↔D	–	*Trammirööbas kuumeneb parajasti siis (st siis ja ainult siis), kui ta pikeneb.* *Kui trammirööbas kuumeneb, siis ta pikeneb ja vastupidi:* *kui trammirööbas pikeneb, siis on ta kuumenenud.*[50] *Trammirööbas kuumeneb ja pikeneb või* *ta ei kuumene ega pikene.*

[49] Kõnekeeles on „ei“ tavaliselt lause keskel, loogikas aga märgitakse eituse märk ~ lause ette.
[50] Siin püüdsime kõnekeeles säilitada vihjet põhjus-tagajärg seosele.

3.2. Tõesustabelid

Asume uurima *tõeväärtustabeleid* ehk lühidalt *tõesustabeleid* (ing k: *truth-tables*).[51]

Ülemisse vasakusse nurka tõesustabelis kirjutame need väited – *komponentväited* –, millest on loogikatehete abil moodustatud uusi väiteid. Nende väidete tõususest ja väärusest sõltub meid huvitava avaldise (mis kirjutatakse ülemisse paremasse nurka) tõesus ja väärus.

Kui komponentväiteid on vaid üks, näiteks väide *A*, siis näeb tabel sel etapil välja nii[52]:

A	

Kui komponentväiteid on kaks, näiteks väited *A* ja *B*, siis näeb tabel sel etapil välja nii:

A B	

Alumisse vasakusse nurka tabelis kirjutatakse komponentväidete kõik võimalikud tõeväärtuste kombinatsioonid. Eesmärgiks on saavutada, et iga võimalik kombinatsioon oleks esindatud vähemalt ühe korra ja et ükski kombinatsioon ei esineks mitu korda. Iga võimalik kombinatsioon peab esinema täpselt ühe korra.

Kombinatoorikast saame üle võtta järgmise reegli:

Kui komponentväidete arv on n,
siis 2 tõeväärtuse t *ja* v *võimalike kombinatsioonide arv on* 2^n.

Niisiis, kui tegemist on ühe komponentväitega *A*, siis on võimalike kombinatsioonide arv $2^1 = 2$ ja vastavalt on ka tõesustabelis joone all *2* rida. Kui tegemist on kahe komponentväitega *A* ja *B*, siis on võimalike kombinatsioonide arv $2^2 = 4$ ja tõesustabelis joone all on *4* rida. Kui tegemist on kolme komponentväitega *A*, *B* ja *C*, siis on võimalike kombinatsioonide arv $2^3 = 8$ ja tõesustabelis joone all on *8* rida. Iga kord, kui lisada üks komponentväide, kahekordistub ridade arv. Ent reaalselt keegi rohkem kui 8-realisi kohmakaid tabeleid välja ei kirjuta.

Kui meil on *üks* komponentväide *A*, siis tuleb tabelisse *2* rida. Täpselt pooled neist ridadest peavad vastama tõeväärtusele *t* ja pooled tõeväärtusele *v*. Kirjutamist alustame tõeväärtusest *t* ülevalt alla:

A	
t	
v	

Iga võimalik olukord esineb siin täpselt *1* kord.

---

51 Ühena esimestest kasutas sarnaseid tabeleid Wittgenstein oma teoses *Tractatus* (vt nt §4.31), mis ilmus 1921 (Wittgenstein 1996). See teos valmis 1. maailmasõjas kaevikus ja saadeti vangilaagrist postiga teele. Vt ka (Cryan jt 2003: 37–9).

52 Detailselt ja nö reaalajas on tõesustabelite täitmise protsessi kirjeldatud õppevahendis Eintalu 2006.

Kui meil on *kaks* komponentväidet *A* ja *B*, siis tuleb tabelisse *4* rida. Alumises vasakus nurgas alustame kirjutamist paremalt poolt, seega *B* alt.[53] Täpselt pooltel juhtudel peab *B* tõeväärtus olema *t* ja pooltel juhtudel *v*. Seega kahes reas peab *B* olema tõene. Kirjutamist alustame ülevalt tõeväärtusest *t* ja kirjutame *t* kaks korda järjest, seejärel aga kaks korda järjest tõeväärtuse *v.*[54]

Seejärel liigume vasakule poole ja kirjutame *A* alla (paremalt teise väite alla) ülevalt alla tõeväärtused *t* ja *v*, alustades väärtusest *t* – aga nüüd kaks korda sagedamini, seega mitte 2-kaupa, nagu *B* alla, vaid 1-kaupa, üle ühe, saades järgmise tabeli:

A	B	
t	t	
v	t	
t	v	
v	v	

Kontrollimisel selgub, et oleme selle kombinatoorika võttega tõepoolest saavutanud olukorra, kus tõeväärtuste iga võimalik kombinatsioon esineb täpselt *1* korra.

Kui meil on *kolm* komponentväidet *A*, *B* ja *C*, siis tuleb tabelisse *8* rida. Kirjutamist alustame paremalt poolt, seega *C* alt, liikudes ülevalt alla. Täpselt pooltel juhtudel peab *C* tõeväärtus olema *t.* Nii kirjutamegi *C* alla *4* korda järjest *t* ja seejärel *4* korda järjest *v.*

Järgnevalt kirjutame *B* alla tõeväärtused kaks korda sagedamini, seega 2-kaupa.

Lõpuks kirjutame *A* alla veel kaks korda sagedamini, so üle ühe, saades järgmise tabeli:

A	B	C	
t	t	t	
v	t	t	
t	v	t	
v	v	t	
t	t	v	
v	t	v	
t	v	v	
v	v	v	

Oleme tõesti saavutanud olukorra, kus iga võimalik kombinatsioon esineb täpselt *1* korra.

Paremasse ülemisse nurka kirjutame selle avaldise, mis on komponentväidetest moodustatud ja mille puhul uurime, kuidas tema tõeväärtus sõltub komponentväidete tõeväärtustest.

Näiteks väide *Mitte-A* on moodustatud väitest *A.* Tabeli ülemisse parempoolsesse nurka kirjutame sümbolitega ~*A*:

A	~A
t	
v	

Väide *A või B* (mittevälistav "või") on moodustatud väidetest *A* ja *B.* Tabeli ülemisse parempoolsesse nurka kirjutame sümbolitega (*A v B):*

[53] See on kokkuleppe küsimus, kas alustada paremalt või vasakult. Mõnes raamatus alustatakse vasakult.

[54] Ka see on kokkuleppe küsimus.

A B	A v B
t t	
v t	
t v	
v v	

Paremasse alumisse nurka kirjutame uuritava avaldise tõeväärtused: igasse ritta sellise tõeväärtuse, nagu sellel avaldisel selles reas on – vastavalt komponentväidete tõeväärtustele.

Negatsiooni täpne definitsioon
Näiteks väite *Mitte-A* jaoks saame sellise lõpetatud tabeli (vt *Tabel 1* allpool):

A	~A
t	v
v	t

TABEL 1
Negatsiooni tõesustabel

Lausearvutuses antaksegi loogikatehete täpsed definitsioonid tõesustabelitega. *Tabel 1* ülal on loogikatehte "negatsioon" definitsioon.

Tabelit saab mõtestada, lugedes piki ridu vasakult paremale. Näiteks esimesest reast loeme, et kui *A* on tõene, siis *Mitte-A* on väär. Teisest reast loeme, et kui *A* on väär, siis *Mitte-A* on tõene.

Näiteks, kui *A* väidab: *Päike paistab*, siis selle tabeli esimesest reast loeme: *Kui see on tõsi, et päike paistab, siis pole see tõsi, et päike ei paista.* Selle tabeli teisest reast loeksime siis aga: *Kui see pole tõsi, et päike paistab, siis on see tõsi, et päike ei paista.*

Tabeleid saab aga analüüsida ka paremalt vasakule. Nii saame antud tabeli esimese rea – mis on siin ainus rida, milles *~A* on väär –, põhjal öelda: *Kui see pole tõsi, et päike ei paista, siis on see tõsi, et päike paistab.* Tabeli teise rea – mis on siin ainus rida, milles *~A* on tõene –, põhjal saame aga öelda: *Kui see on tõsi, et päike ei paista, siis pole see tõsi, et päike paistab.*

Binaarsete tehete täpsed definitsioonid
Binaarseks nimetatakse tehet, mis moodustab uue väite *kahest* komponentväitest. Järgnevalt esitame ühises tabelis tuntumate binaarsete loogikatehete – mida ülalpool vaatlesime – täpsed definitsioonid (vt *Tabel 2* allpool)[55]:

Konjukntsioon, disjunktsioon, implikatsioon ja ekvivalents:

A B	A & B	A v B	A→B	A↔B
t t	t	t	t	t
v t	v	t	t	v
t v	v	t	v	v
v v	v	v	t	t

TABEL 2
Binaarsete tehete tõesustabel

[55] Kui tabeli vasakpoolses osas on kasutatud teistsugust järjestust kui meil, siis siinne tabeli parempoolne osa ei sobi.

Tabelist 2 ülal näeme järgnevat:

Konjuktsioon **A & B** on tõene siis ja ainult siis, kui *A* ja *B* on mõlemad tõesed (*1.* rida).
Disjunktsioon **A v B** on väär parajasti siis, kui *A* ja *B* on mõlemad väärad (*4.* rida).
Ekvivalents **A↔B** on tõene parajasti siis, kui *A* ja *B* tõeväärtused on ühesugused (*1.* ja *4.* rida).
Implikatsioon on ebasümmeetriline tehe ja temast räägime eraldi.

Implikatsioon
Implikatsioon **A→B** on väär parajasti siis, kui implikatsiooni märgist → vasakul olev väide *A* (nn *antetsedent*) on tõene ja paremal olev väide *B* (nn *konsekvent*) on väär (*3.* rida). Seega: kui *A* on väär, siis on *(A→B)* tõene, kui aga *A* on tõene, siis ühtib (*A→B)* tõeväärtus *B* tõeväärtusega.

Implikatsiooni *(A→B)* võib lugeda konditsionaalina "Kui *A*, siis *B*," – kusjuures seda konditsionaali on muudetud nõnda, et ta loetakse tõeseks juhul, kui *A* on väär. Olukord, milles *A* on tõene ja *B* on väär, väärab nii implikatsiooni *(A→B)* kui ka konditsionaali "Kui *A*, siis *B*".

Implikatsioon ei ole sümmeetriline tehe
Hoolikalt tuleb jälgida, milline väide on kirjutatud märgist → vasakule poole, milline aga paremale poole. Järgnevas tabelis on **A→B** tulp kirjutatud õigesti, **B→A** tulp on aga kirjutatud kaks korda: esmalt valesti ja seejärel õigesti. *A* ja *B* järjekorda on vigases tulbas ekslikult vaadatud mitte implikatsioonimärgi enda juurest, vaid tabeli vasakpoolsest ülemisest nurgast, kus see järjekord on aga õigele vastupidine (vt *Tabel 3* allpool):

		õigesti	**valesti**	**õigesti**
A	**B**	**A→B**	**B→A**	**B→A**
t	t	t	t	t
v	t	t	t	v
t	v	v	v	t
v	v	t	t	t

TABEL 3
Implikatsiooni ebasümmeetrilisus

3.3. Järjestikused tehted

Lausearvutuse *valemiks* (või ka *avaldiseks*) nimetame sama asja, mida matemaatikas nimetatakse (matemaatiliseks) avaldiseks. Valemiks on iga lihtne väide või lihtsatest väidetest loogikatehete abil moodustatud väide.

Kui *A*, *B* ja *C* on väited, siis on valemiks näiteks lihtne väide *A*, või keerulisem väide (*A v B)*, või ka mitme tehte järjestikuse sooritamise tulemusena saadud väide:

(A v B) & C.

Edaspidi huvitavadki meid eelkõige mitme tehtega valemid.

Tehete järjekord
Ühes anekdoodis vastas kohtunik küsimusele, mida teha mõrvassüüdistatuga, kirjaga: "Vabaks lasta, mitte üles puua!" Kahjuks asetas ta oma kirjas koma valesse kohta: "Vabaks lasta mitte, üles

puua!" – Siin sai probleemseks, millisele lause osale rakendus eitus "mitte".

Analoogiliselt on kõnekeelseis lauseis mõnikord probleemseks loogikatehete järjekord.

Kujutlegem olukorda, milles liikluseeskirjad sisaldaksid järgmist lauset:

Siis tuleb sõita otse või pöörata vasakule ja anda signaali.

Kas siis: 1) Tuleb sõita otse või vasakule ja anda mõlemal juhul signaali? Või: 2) Tuleb sõita otse või pöörata signaali andes vasakule?

Loogika sümbolkeeles kasutatakse järgmisi kokkuleppeid tehete järjekorrale[56]:

Sulgudes asetsevad tehted tuleb sooritada kõigepealt.

Kui eituse märgi järelt ei alga sulg, siis eituse tehe tuleb sooritada kõige enne – ja ta rakendub vaid eituse märgile vahetult järgnevale väitele.

Näitena interpreteerime mõningaid valemeid:

(A v B) & C	–	*A ja/või B on tõene ja lisaks eelöeldule on C tõene.*
A v (B & C)	–	*A on tõene ja/või B ja C on mõlemad tõesed.*
~(B v C)	–	*Järgnev pole tõsi: B ja/või C.*
~B v C	–	*B on väär ja/või C on tõene.*

Märgime siin, et viimane valem *~B v C* on esitatav ka kujul *(~B) v C.*

Tehete järjekorra näitamiseks on mugav kasutada *numbreid tehtemärkide kohal.* Ülaltoodud näidete jaoks saame siis järgmise kirjapildi:

$$(A \overset{1}{v} B) \overset{2}{\&} C \qquad A \overset{2}{v} (B \overset{1}{\&} C)$$

$$\overset{2}{\sim}(B \overset{1}{v} C) \qquad \overset{1}{\sim}B \overset{2}{v} C$$

Naasegem nüüd oma hüpoteetiliste liikluseeskirjade juurde. Esitatud kohustusliku sõiduviisi kirjeldamiseks võtame kasutusele järgmise tähistuse:

A	–	*Sõidetakse otse.*
B	–	*Pööratakse vasakule.*
C	–	*Antakse signaali.*

Siis hämarale lausele "Sõitetakse otse või pööratakse vasakule ja antakse signaali" vastab avaldis:

A v B & C. **(3.3.1)**

Selline avaldis aga ei olegi LA valem, sest ta on LA keeles grammatiliselt ebakorrektselt kirjutatud: tehete järjekord on siin jäänud määramata.[57] Avaldis (3.3.1) on lausearvutuses sama mõttetu nagu aritmeetikas näiteks avaldis *2 + = –*, millel polegi tõeväärtust.

Valem *(A v B) & C* oleks aga grammatiliselt korrektne ja vastaks reeglile, milles kirjeldatud kohustuslik olukord on: "Sõidetakse otse või vasakule ja mõlemal juhul antakse signaali."

---

[56] Need kokkulepped on nagu sulgude kasutamise ja miinusmärgi kasutamise kokkulepped matemaatikas.

[57] Mõnes konventsioonis antakse konjunktsioonile & automaatne prioriteet ja siis on avaldis (3.3.1) mõtestatud.

Valem *A v (B & C)* vastaks reeglile, milles kirjeldatud kohustuslik olukord on: “Sõidetakse otse või pööratakse signaali andes vasakule.”

Valem *~(B v C)* ütleks, et pole tõsi, et: pööratakse vasakule ja/või antakse signaali.

Valem *~B v C* ütleks, et vasakule ei pöörata ja/või antakse signaali.

Valemite arvutamine
Kuidas valemeid (järjestikuseid tehteid) tõesustabelitega arvutatakse?[58]

NÄIDE 1. Uurime ülalmainitud valemit

$$(A \text{ v } B)\ \&\ C. \qquad \textbf{(3.3.2)}$$

Tabeli saame kiiresti täita kuni järgmise faasini:

A B C	1 2 (A v B) & C
t t t	
v t t	
t v t	
v v t	
t t v	
v t v	
t v v	
v v v	

Tabelis on arukas ja lausa kohustuslik **märkida tehete sooritamise järjekord valemis numbritega täpselt tehtemärkide kohal** (nagu me ülal tegime). See hõlbustab arvutamist ja annab protokolli tulpade arvutamise järjekorrast. Keerulistel juhtudel ei saa tehete sooritamise järjekorda tabelis valemi enda kujust üheselt välja lugeda, mistõttu numeratsioon on siis eriti vajalik.

Kuigi valmis tabelit mõistame me, lugedes seda piki ridu vasakult paremale, **on tabeli täitmisel mugavam arvutada hoopiski ülevalt alla, tulpade kaupa, sest nõnda saame me teha ühe ja sama tehte kõikidele ridadele järjest.**

Niisiis arvutame kõigepealt disjunktsiooni *(A v B)* tulba, vaadates selleks *A* ja *B* tõeväärtusi tabeli vasakust osast, liikudes seejuures ülevalt alla. Disjunktsioon (*A v B)* on väär vaid neis ridades, milles *A* ja *B* on mõlemad väärad.

Järgnevalt peame saadud tulpa numbri *1* all tõlgendama tervikliku väite tulbana – justnagu asetseks ta tabeli vasakpoolses osas. – Niisiis on meil vaja arvutada tulba *1* konjunktsioon *C*-tulbaga tabeli vasakpoolsest osast.

Vilunum arvutaja võib selle protseduuri sooritada peast, kirjutades kohe numbri *2* alla konjunktsioonitulba. Algajale on aga lihtsam alustada sellest, et ta võib *C*-tulba tabeli vasakpoolsest osast parempoolsesse osasse väite *C* alla üle kanda (nagu meie siin teemegi).

Seega tulpa *1* võrdleme *C*-tulbaga tabeli parempoolsest osast, et arvutada nende kahe tulba (all joonega ühendatud) vahele nende tulpade konjunktsioon *&* tulbaks *2*. Lähtume konjunktsiooni definitsioonist: tõeväärtuse *t* saame vaid juhul, kui nii vasakul kui ka paremal pool konjunktsioonimärki *&* on tõeväärtus *t*. Sedasi tõesustabel valmibki (vt *Tabel 4* allpool):

[58] Detailne esitus võtaks palju ruumi, millega õpikuis siin enamasti koonerdatakse. Vt aga Eintalu 2006.

			1	2	
A	**B**	**C**	**(A v B)**	**&**	**C**
t	t	t	t	**t**	t
v	t	t	t	**t**	t
t	v	t	t	**t**	t
v	v	t	v	**v**	t
t	t	v	t	**v**	v
v	t	v	t	**v**	v
t	v	v	t	**v**	v
v	v	v	v	**v**	v

TABEL 4
Valemi (3.3.2) tõesustabel

Valemi kohale kirjutatud numbritest suurima numbri all olev tulp on arvutuse lõpptulemus, mis iseloomustab seda valemit tervikuna.

Ülalolevas *Tabelis 4* on suurimaks numbriks *2.* **Otstarbekas on valmis tabelis kirjutada suurima numbriga tulp mingil moel esiletõstetult,** nagu see ülal ongi tehtud.

Selle tabeli abil saame vasakult paremale lugedes teada näiteks seda, et kui *A* on tõene, *B* on tõene ja *C* on väär (*5.* rida), siis on väide *(A v B) & C* väär.

Tabelit paremalt vasakule lugedes saame aga teada, millistel tingimustel saab väide *(A v B) & C* olla tõene. – Näeme, et väide *(A v B) & C* on tõene vaid esimeses kolmes reas. Need kolm ainsat võimalust, kuidas väide *(A v B) & C* saab olla tõene, on selle väite *tõesustingimused.*

Muuhulgas näeme siit ka, et alati, kui *(A v B) & C* on tõene, on tõene ka *C*. Seega väite *C* tõesus on väite *(A v B) & C* tõesuse *tarvilik tingimus.*

NÄIDE 2. Võrdleme ühises tabelis valemit (3.3.2) ülalt valemiga (3.3.3):

$$A \text{ v } (B \,\&\, C). \qquad \textbf{(3.3.3)}$$

Lõppkujul saame järgmise tõesustabeli (vt *Tabel 5* allpool):

			1	2			2	1
A	**B**	**C**	**(A v B)**	**&**	**C**	**A**	**v**	**(B & C)**
t	t	t	t	**t**	t	t	**t**	t
v	t	t	t	**t**	t	v	**t**	t
t	v	t	t	**t**	t	t	**t**	v
v	v	t	v	**v**	t	v	**v**	v
t	t	v	t	**v**	v	t	**t**	v
v	t	v	t	**v**	v	v	**v**	v
t	v	v	t	**v**	v	t	**t**	v
v	v	v	v	**v**	v	v	**v**	v

TABEL 5
Valemite (3.3.2) ja (3.3.3) võrdlus

Selle tabeli abil saame väiteid *(A v B) & C* ning *A v (B & C)* võrrelda.[59] Selleks võrdleme kummagi valemi suurima numbriga tulpa (ülal esitasime need tulbad rõhutatult). – Märkame erinevust *5.* ja *7.* reas (ülal on need read varjutatud). Nende kahe rea põhjal saame ütelda, et kui *A* on tõene ja *C* on väär, siis on – olenemata *B* tõeväärtusest – valemite *(A v B) & C* ning *A v (B & C)* tõeväärtused erinevad: neist esimene on siis väär ja teine on tõene.

Naasegem taas oma hüpoteetiliste liikluseeskirjade juurde. Oletagem, et ma sõitsin ristmikul otse ja signaali ei andnud (vt *7.* rida *Tabelist 5* ülalt).[60] Siis väide *(A v B) & C:*

Ma sõitsin kas otse või pöörasin vasakule,
aga igatahes andsin ma signaali.

on väär. Seevastu väide *A v (B & C):*

Ma sõitsin otse või pöörasin signaali andes vasakule.

on samas olukorras tõene. Seega need kaks väidet on erineva mõttega.

Kuna valemite *(A v B) & C* ning *A v (B & C)* tulbad *Tabelis 5* ülal ei ühti täielikult, siis ei pruugi täielikult kattuda ka selliste valemitega väljendatud väidete mõtted. Erinevad laused ei saa ju olla täpselt sama mõttega, kui kas või teoreetiliseltki on võimalik selline olukord, milles üks neist lausetest väljendab tõest propositsiooni, teine aga mitte.[61]

NÄIDE 3. Lõpuks arvutame tabeli valemile

(A v B) & (A v C). **(3.3.4)**

Siin pole kokkulepetega määratud, kummas sulus tuleb tehe sooritada esimesena. Ent kumma tee me ka ei valiks, tulemus oleks ikka samasugune (lugeja võib seda ise kontrollida).

Valime vasakult paremale arvutamise tee. Tõesustabel näeb siis välja nii (vt *Tabel 6* allpool):

A	B	C	1 (A v B)	3 &	2 (A v C)
t	t	t	t	**t**	t
v	t	t	t	**t**	t
t	v	t	t	**t**	t
v	v	t	v	**v**	t
t	t	v	t	**t**	t
v	t	v	t	**v**	v
t	v	v	t	**t**	t
v	v	v	v	**v**	v

TABEL 6
Valemi (3.3.4) tõesustabel

Märkame siin näiteks, et kõikides ridades, milles väide *(A v B) & (A v C)* on väär (so *4.*, *6.* ja *8.* rida), on ka *A* väär. Seega väitel *(A v B) & (A v C)* on juhtumisi lihtne *väärustingimus:* komponentväide *A* peab olema väär.

[59] Eeldame, et märkidel *A*, *B* ja *C* on kummaski valemis sama tähendus.
[60] Et *5.* rida on võimatu (ei saa sõita korraga otse ja vasakule), seda käesolev tõesustabel ise ei ütle.
[61] Me naaseme selle teema juurde hiljem, kui käsitleme *loogilist samaväärsust.*

Kasulikke arvutusvõtteid
Valemite arvutamisel on kasulik teada veel järgmist:

Nagu ka matemaatikas: Tehete järjekorda saab fikseerida, kasutades mitmekordseid sulge.

Näiteks:

$$[(A \overset{1}{\rightarrow} B) \overset{2}{\&} A] \overset{3}{\rightarrow} B.$$

Nagu ka aritmeetikas korrutamis- ja liitmistehtega[62]*: Mitme järjestikuse konjunktsiooni puhul ja samuti mitme järjestikuse disjunktsiooni puhul pole komponentväidete järjekord ja tehete järjekord olulised.*

Näiteks:

$$A \ \& \ B \ \& \ C = (A \ \& \ B) \ \& \ C = A \ \& \ (B \ \& \ C) = (B \ \& \ A) \ \& \ C, \text{ jne} \quad \textbf{(3.3.5)}$$

$$A \vee B \vee C = (A \vee B) \vee C = A \vee (B \vee C) = (B \vee A) \vee C, \text{ jne} \quad \textbf{(3.3.6)}$$

Lugeja võib neid võrdusi erijuhtudel ise kontrollida: tõesustabelis tulevad tulbad ühesugused.[63] Reegleid (3.3.5) ja (3.3.6) nimetatakse *kommutatiivsuse ja assotsiatiivsuse seadusteks.*

3.4. Lausete klassifikatsioon

Lausearvutuse valemeid klassifitseeritakse järgnevalt:

1. *tautoloogiad* ehk *samaselt tõesed valemid;*
2. *vastuolud* ehk *samaselt väärad valemid;*
3. *kontingentsed valemid* ehk *asjaoludest sõltuvad valemid.*

See klassifikatsioon on defineeritud järgnevalt:

SAMASELT TÕENE on valem, mis on tõene tõesustabeli igas reas;
SAMASELT VÄÄR on valem, mis on väär tõesutustabeli igas reas;
ASJAOLUDEST SÕLTUV on valem, mis tõesustabeli mõnedes ridades on tõene ja mõnedes ridades on väär.

Ülaltoodud definitsiooni põhjal saab kontingentse valemi defineerida ka järgnevalt: **Kontingnentne valem on valem, mis pole ei samaselt tõene ega ka samaselt väär.**

Vaatleme mõningaid näiteid (A tähistab siin mingit väidet):

$A \vee \sim A = \boldsymbol{T}$	– üks tüüpiline tautoloogia;	**(3.4.1)**
$A \ \& \sim A = \boldsymbol{V}$	– üks tüüpiline vastuolu nimega *ilmutatud* vastuolu;	**(3.4.2)**
$A \vee A$	– üks kontingentne valem.	**(3.4.3)**

[62] Näide aritmeetikast: $1 + 2 + 3 = (1 + 2) + 3 = (2 + 3) + 1 = 6$.
[63] Nende reeglite üldjuhu tõestus nõuab aga nn „matemaatilist induktsiooni“ ja on ootamatult tülikas.

Ülal pidasime kirjapildiga ***T*** ja ***V*** silmas järgmist:

T – mistahes tingimustel (tõesustabeli igas reas) tõene valem;
V – mistahes tingimustel (tõesustabeli igas reas) väär valem. **(3.4.4)**

Tähistame näiteks:

A – Homme sajab vihma.

Siis kolmele valemile (3.4.1)–(3.4.3) vastavad järgmised ilmaennustused:

A v ~A	–	*Homme sajab vihma või ei saja.*
A & ~A	–	*Homme sajab ja homme ei saja vihma.*
A v A	–	*Homme sajab vihma või homme sajab vihma.*

Kui märk *A* ülal tähistab igal pool ühte ja sama ning täpse mõttega väidet, siis esimene ennustus on kindlasti õige ja teine ennustus on kindlasti vale – ning seda olenemata homsest ilmast. Kolmanda ilmaennustuse õigsus sõltub aga sellest, kas homme tõesti sajab vihma. Teisisõnu: esimesed kaks "ennustust" ei ole faktiväited; kolmas ennustus aga on *faktiväide.*

Valemite klassifitseerimine tõesustabeliga

Koostame ülalvaadeldud kolmele valemile (3.4.1)–(3.4.3) ühise tõesustabeli. Lõpetatult näeb see tabel välja nii (vt *Tabel 7* allpool, milles on näidatud vaid arvutuste lõpptulbad):

A	A v ~A	A & ~A	A v A
t	t	v	t
v	t	v	v

TABEL 7
Valemite (3.4.1)–(3.4.3) klassifikatsioon

Niisiis valem *(A v ~A)* on samaselt tõene – sest ta on tõene tabeli igas reas. Valem *(A & ~A)* on samaselt väär – sest ta on väär igas reas. Valem *(A v A)* on kontingnentne – sest mõnedes ridades (*1.* rida) on ta tõene, mõnedes ridades (*2.* rida) aga väär. Kasulik on tõeväärtuste rühmitusi tabelis rõhutada. Ülal tegime seda, tõmmates ühesuguste tõeväärtuste rühmadele jooned ümber.

Valemite klassifikatsiooni interpreteerimine

SAMASELT TÕENE valem on tõene oma vormi tõttu ja olenemata sellest, milline maailm on. Seetõttu **samaselt tõese valemina esitatud lause on infotühi:** ta ei ütle maailma kohta midagi. Näiteks "ilmaennustus" *Homme sajab või ei saja vihma*, ei anna mulle mingitki vihjet, kas peaksin homme kodust väljudes vihmavarju kaasa võtma või mitte.

Väljendit "tautoloogia" kasutataksegi kõnekeeles tihti halvustava varjundiga, tähistamaks juttu, mis ei vasta küsimusele või ei paku (uut) infot.

SAMASELT VÄÄR valem on väär oma vormi tõttu ja olenemata maailma omadustest. Seetõttu ka **samaselt väära valemina esitatud lause on infotühi.** Näiteks ilmaennustus *Homme sajab vihma, aga homme ei saja vihma*, ei informeeri mind, kas peaksin homme vihmavarju kaasa võtma.

KONTINGENTSE valemina esitatud lausel on oma loogilise vormi tõttu *šanss* maailma kohta midagi informatiivset ütelda.

Näitena vaatleme kontingentset valemit (3.4.3) ülalt: *(A v A)*. Väide kujul *(A v A)* eeldab ühtlasi, et see väide *(A v A)* on ka tõene. – Sellest eeldusest tuleneb tingimus, et tegelik maailm vastab tõesustabeli esimesele reale – mis on siin ju ainus rida, milles *(A v A)* on tõene. Sellel real vasakule liikudes näeme, et (*A v A)* tõesustingimuseks on, et *A* on tõene (vt *Tabel 8* allpool):

A	**A v A**
t	**t**
v	v

TABEL 8
Väite (A ja/või A) tõesustingimused

Seega näiteks väide *Vihma sajab või vihma sajab*, on sisukas: ta sisaldab infot *Vihma sajab.*

Täiendavad loogilised seosed
Siiski pole meil garantiid, et kontingentse valemina esitatud väide annab informatsiooni. Et väide on sisukas, seda ei saa otsustada, toetudes ainult väite loogilisele vormile.

Valemis esinevate komponentväidete tähendus võib luua täiendavaid loogilisi seoseid.

Näiteks valem *(A v B)* on definitsiooni põhjal kontingentne. Nüüd näiteks ka väide *Homme sajab lund ja/või rahet*, on tõesti kontingentne ja sisukas. Uurime aga järgmist väidet:

Homme sajab vihma ja/või ei saja vihma. **(3.4.5.)**

Kui siin pealiskaudselt tähistada:

A – *Homme sajab vihma.*
B – *Homme ei saja vihma*, **(3.4.6)**

saame selle väite (3.4.5) esitada kujul:

$$A \vee B, \quad \textbf{(3.4.7)}$$

ning selline *valem* on kontingentne. – Ent see veel ei tähenda, et ka *väide* (3.4.5) on kontingentne. Nimelt saame siin kirja panna täiendava loogilise seose väidete (3.4.6) *Homme sajab vihma*, ja *Homme ei saja vihma*, vahel:

$$B = \sim A. \quad \textbf{(3.4.8)}$$

Seega need kombinatsioonid, milles *A* ja *B* on ühesuguse tõeväärtusega, on siin loogiliselt võimatud. Esineda saavad vaid kombinatsioonid, milles *A* ja *B* tõeväärtused on erinevad (vt *Tabel 9* allpool, milles võimatud read on varjutatud, võimalikud read aga rõhutatud):

A	~A	A v ~A
t	t	t
v	t	t
t	v	t
v	v	v

TABEL 9
Täiendavad loogilised seosed

Seega saavad (*A v B)* tõesustabelis siin realiseeruda vaid *2.* ja *3.* rida, mistõttu *(A v B)* tõeväärtustest saab realiseeruda vaid tõeväärtus *t*. – **Niisiis väide (3.4.5) on siiski tautoloogia.**

Samale tulemusele oleksime jõudnud, kui oleksime kohe teinud *täisanalüüsi*, kasutades vaid tähistust *A – Homme sajab vihma.* Väide (3.4.5) esitub siis ilmse tautoloogiana *(A v ~A).*[64]

KOKKUVÕTTEKS:

Tautoloogiana *esitatud väide on sisutühi.*
Vastuoluna *esitatud väide on sisutühi.*
Kontingentse valemina esitatud väite *sisukus sõltub tema komponentväidete tähendustest.*

Seega lausearvutuse tautoloogiad ja vastuolud on küll loogikareeglid (nagu (3.4.1) ja (3.4.2)), ent see pole loogikareegel, kui mõni väide on kontingentne.

NÄIDE. Klassifitseerime järgmise valemi:

$$[A \ \&\ (A \rightarrow B)] \leftrightarrow (A \ \&\ B). \qquad \textbf{(3.4.9)}$$

Selleks koostame tõesustabeli, arvestades, et: 1) implikatsioon *(p→q)* on väär parajasti siis, kui *p* on tõene ja *q* on väär; 2) konjunktsioon *(p & q)* on tõene parajasti siis, kui *p* ja *q* on mõlemad tõesed; 3) ekvivalents *(p ↔ q)* on tõene parajasti siis, kui *p* ja *q* tõeväärtused on ühesugused (vt *Tabel 10* allpool):

A	B	2 [A &	1 (A→B)]	4 ↔	3 (A & B)
t	t	**t**	t	**t**	**t**
v	t	**v**	t	**t**	**v**
t	v	**v**	v	**t**	**v**
v	v	**v**	t	**t**	**v**

TABEL 10
Valemi (3.4.9) klassifikatsioon

Koostatud tabeli lõpptulp *4* (vt joonega piiratud rühma) näitab, et see valem on *samaselt tõene.*

Selle lõpptulba *4* arvutamisel tuli ekvivalentsitehte märgist ↔ vasakul- ja paremalpool olevatest tulpadest omavahel võrrelda just suurimate numbritega tulpi – seega tulpi *2* ja *3* (tabelis ülal esitatud rõhutatult ja alt joonega ühendatud).

[64] Analoogiliselt võib selguda, et kontingentse valemina esitatud väide on tegelikult vastuolu. Täiendavaid loogilisi seoseid võib ilmsiks tuua ka lausearvutusest võimsam loogika *predikaatarvutus.*

3.5. Lausetesüsteemid

Väidetesüsteemiks nimetatakse lõpliku arvu nt väidete hulka, näiteks väidete loetelu $p1$; $p2$; ... ; pn. Nagu ka matemaatikas, ümbritsetakse sellised kogumid loogeliste sulgudega:

$$\{p1; p2; ... ; pn\} \qquad \textit{väidetesüsteem} \qquad \textbf{(3.5.1)}$$

Väidetesüsteemi nimetatakse vastuoluliseks parajasti siis,
kui on loogiliselt võimatu,
et selle süsteemi väited oleksid kõik korraga tõesed. **(3.5.2)**

Teisisõnu, süsteem (3.5.1) on vastuoluline parajasti siis, kui – olenemata maailma omadustest – on vähemalt üks selle süsteemi väide väär. Süsteemi vastuolulisus on süsteemi väidete omavaheline formaalne seos, mis ei sõltu väidete ja maailma vahekorrast.

Väidetesüsteemi, mis ei ole vastuoluline, nimetatakse *kooskõlaliseks.* Kooskõlalise väidetesüsteemi väited saaksid mingitel asjaoludel olla kõik korraga tõesed. Kas vastavad asjaolud maailmas reaalselt võimalikud on – see on aga faktiküsimus, millega loogika ei tegele.

On ka võimalik, et väidete $p1$; $p2$; ... ; pn tähendused loovad täiendavaid loogilisi seoseid, mistõttu esmapilgul kooskõlalisena näiv väidetesüsteem võib siiski osutuda vastuoluliseks.

Konjunktsiooni *&* definitsioonist tulenevalt:

Väidetesüsteem {p1; p2; ... ; pn} *on vastuoluline parajasti siis,*
kui väide p1 & p2 & ... & pn *on vastuolu.* **(3.5.3)**

Ent süsteemi vastuolulisuse kontrollimiseks on määratlus (3.5.2) mugavam kui määratlus (3.5.3), sest esimese puhul pole tarvidust arvutada konjunktsioone.

Lausearvutuse vahenditega saab süsteemi vastuolulisust määratleda järgnevalt:

Väidetesüsteem {p1; p2; ... ; pn} *on vastuoluline parajasti siis,*
kui väidete p1; p2; ...; pn *ühises tõesustabelis pole ühtegi rida,*
milles need väited kõik korraga tõesed oleksid. **(3.5.4)**

Kui aga tõesustabelis leidub rida, milles süsteemi väited on kõik korraga tõesed, siis oleme leidnud *kontranäite* (*vastunäite*) väitele, et selle süsteemi väited ei saa kõik korraga tõesed olla. Kontranäite esitamisega näitamegi lausearvutuses väidete süsteemi vormilist kooskõlalisust.[65]

NÄIDE 1. Analüüsime kolmest väitest koosnevat väidetesüsteemi: $p1 = A \vee B$; $p2 = {\sim}A$; $p3 = {\sim}B$, kus A ja B on mingid väited:

$$\{A \vee B; {\sim}A; {\sim}B\} \qquad \textbf{(3.5.5)}$$

Koostame selle süsteemi väidetele ühise tõesustabeli (vt *Tabel 11* allpool):

65 Väidete tähendused või ka predikaatarvutus võivad siiski veel ilmsiks tuua vastuolu.

A	B	A v B	~A	~B
t	t	t	**v**	**v**
v	t	t	t	**v**
t	v	t	**v**	t
v	v	**v**	t	t

TABEL 11
Väidetesüsteemi (3.5.5) vastuolulisus

Selle tabeli parempoolses osas pole ühtegi rida, milles süsteemi kõik kolm väidet oleksid korraga tõesed. **Seega väidetesüsteem (3.5.5) on vastuoluline.**

Näiteks väidetesüsteem {*Kokk ja/või kelner on mõrvar*; *Kokk ei ole mõrvar*; *Kelner ei ole mõrvar*} on vastuoluline. Olenemata asjaoludest – need kolm väidet ei saa korraga tõesed olla.

Vastuolu mõiste
Seni oleme käsitlenud vaid ilmutatud vastuolusid nagu *(A & ~A)*. Ent *Tabelis 11* on tegemist millegi keerukamaga. Siin pole midagi ilmutatult nii jaatatud kui eitatud. Siiski nimetame seda süsteemi vastuoluliseks. –Asi on selles, et siin ühtede väidete jaatus *toob kaasa* teiste väidete eituse.

Vastuolu ja deduktsioon
Peatükis 1 määratlesime loogilise järelduse vastuolu kaudu. Võime selle nüüd sõnastada nii:

Väidetesüsteem {q; ~r} *on vastuoluline parajasti siis, kui* q ⇒ r. **(3.5.6)**

Kui *q* jaatus ja *r* eitus kokku on vastuolu, siis eeldustest *q* järeldub tulem *r* – ja vastupidi.

Näites (3.5.5) ülalt annab see reegel kolm kehtivat järeldust:

$(A \vee B) \,\&\, {\sim}A \Rightarrow B$; $(A \vee B) \,\&\, {\sim}B \Rightarrow A$; ${\sim}A \,\&\, {\sim}B \Rightarrow {\sim}(A \vee B)$ **(3.5.7)**

NÄIDE 2. Analüüsime kolmest väitest koosnevat süsteemi (vt ka *Tabel 12* allpool):

{*A v B*; *A*; *B*} **(3.5.8)**

A	B	A v B	A	B
t	t	**t**	**t**	**t**
v	t	t	v	t
t	v	t	t	v
v	v	v	v	v

kontranäide

TABEL 12
Väidetesüsteemi (3.5.8) kooskõlalisus

Tabeli *1.* rida annab siin **kontranäite:** selles reas on süsteemi kõik kolm väidet korraga tõesed. **Seega väidetesüsteem (3.5.8) on kooskõlaline.**

Kontranäite esitamisega ei saa aga tõestada süsteemi vastuolulisust. Vastuolu näitamiseks tuleb ju näidata, et süsteemi väited ei saa korraga tõesed olla ja et erandeid siin pole.

3.6. Loogiline järeldus ja loogiline samaväärsus

Loogikareegliteks on sellised seosed valemite vahel, mis on tõesed olenemata asjaoludest. Loogika alamharu lausearvutuse (*LA*) reegleid saab tõestada tõesustabelitega. *LA* reeglid on järgmised:

- tautoloogiad;
- vastuolud;
- vastuolulised väidetesüsteemid;
- loogilised järeldused;
- loogilised samaväärsused.[66]

Tautoloogiaid, vastuolusid ja väidetesüsteeme juba uurisime. Uuteks teemadeks on *loogilised järeldused* ja *loogilised samaväärsused.*

LAUSEARVUTUSE JÄRELDUSED

Loogiline järeldus on defineeritud järgnevalt (vt ka määratlus (3.5.6) ülalt):

Antud eeldustest q *järeldub antud tulem* r *parajasti siis,*
kui eelduste q *jaatamine ja tulemi* r *eitamine kokku moodustavad vastuolu –*
seega: kui eelduste q *tõesuse puhul on tulemi* r *väärus loogiliselt võimatu.*

Selle põhjal saame sõnastada kriteeriumi *LA* järelduse kehtivuse jaoks:

Lausearvutuse järeldus kehtib parajasti siis, kui tõesustabeli igas reas,
milles kõik eeldused on tõesed, on tõene ka tulem.[67] **(3.6.1)**

Kui aga tõesustabelis leidub rida, milles kõik eeldused on korraga tõesed, ent tulem on siiski väär, siis oleme leidnud *kontranäite* (*vastunäite*) väitele, et neist eeldustest rangelt järeldub see tulem. Kontranäite esitamisega näitamegi lausearvutuses, et järeldus ei kehti.[68]

NÄIDE 1. Kontrollime järgmise järelduse kehtivust:

$$\begin{array}{c} A \vee B \\ \sim B \\ \hline A \end{array} \qquad \textbf{(3.6.2)}$$

See on kehtiv järeldus nimega *Disjunktiivne Sülllogism* (lühend: *DS*).[69]

Näiteks detektiiv eeldab, et kokk ja/või kelner on mõrvar. Seejärel jõuab ta eeldusele, et kelner mõrvar ei ole. Kuni ta mõlemaid eeldusi tõesteks peab, ei tohiks ta eitada, et kokk on mõrvar.

Järeldus (3.6.2) kehtib parajasti siis, kui väidetesüsteem (3.5.5) eelmisest paragrahvist on vastuoluline. Me juba tõestasime, et see süsteem on vastuoluline ja et järeldus (3.6.2) seetõttu kehtib (vt järeldused (3.5.7)).[70]

---

66 Vastuolu ise on väär. Reegliks on siin aga väide, et tegemist on vastuoluga (vt võrdust (3.4.2)).
67 Kui polegi ridu, milles kõik eeldused on tõesed, siis on eeldused vastuolus ja neist „järeldub“ mis tahes väide.
68 Konkreetsete väidete tähendused või ka predikaatarvutus võivad aga ilmsiks tuua täiendavaid loogilisi seoseid, mistõttu konkreetne järeldus võib ikkagi osutuda kehtivaks, isegi kui esialgne vorm seda ei näita.
69 Lausearvutuse süllogismid pole Aristotelese süllogismid.
70 Järelduse (3.6.2) kehtivust saaks ka kohmakamalt kontrollida, näidates, et $[(A \vee B) \ \& \sim B] \rightarrow A$ on tautoloogia.

Siin demonstreerime aga, kuidas järelduse kehtivust kontrollida tingimuse (3.6.1) abil. Selleks moodustame tõesustabeli, mille parempoolsesse ülemisse ossa kirjutame vasakult paremale alul kõik *eeldused* ja seejärel viimasena *tulemi* (vt *Tabel 13* allpool):

		eeldused		**tulem**
A	**B**	**A v B**	**~B**	**A**
t	t	t	v	
v	t	t	v	
t	v	**t**	**t**	**t**
v	v	v		

TABEL 13
Disjunktiivse süllogismi (3.6.2) kehtivus

Me peame kontrollima, kas igas reas, milles kõik eeldused on tõesed, on tõene ka tulem. – **Seega pole meil vajadust kontrollida neid ridu, milles kas või üks eeldus on väär.** Niisiis arvutame kõigepealt välja eelduste tulbad. Seejärel katkestame arvutused neis ridades, milles mõni eeldus on väär, ja jätkame vaid neis ridades, milles kõik eeldused on tõesed. Antud juhul on vaid *3.* reas (ülal esitatud rõhutatult) kõik eeldused tõesed. Seega peame nüüd kontrollima, kas sel ainsal juhul on tõene ka tulem. – Näeme, et tulem on sel juhul tõesti tõene. **Seega järeldus (3.6.2) kehtib.**

NÄIDE 2. Kontrollime kehtivat järeldust nimega *Hüpoteetiline Süllogism* (lühend: *HS*):

$$\begin{array}{c} A \rightarrow B \\ B \rightarrow C \\ \hline A \rightarrow C \end{array} \qquad \textbf{(3.6.3)}$$

Näiteks Einstein eeldab, et kui Newtoni mehhaanika kehtib, siis kehtivad Galilei teisendused. Edasi eeldab ta, et kui Galilei teisendused kehtivad, siis sõltub valguse kiirus taustsüsteemist. Siit järeldab ta rangelt, et kui Newtoni mehhaanika kehtib, siis sõltub valguse kiirus taustsüsteemist.
Tõesustabel näeb siin välja selline (vt *Tabel 14* allpool):

A	**B**	**C**	**A → B**	**B → C**	**A → C**
t	t	t	**t**	**t**	**t**
v	t	t	**t**	**t**	**t**
t	v	t	v		
v	v	t	**t**	**t**	**t**
t	t	v		v	
v	t	v		v	
t	v	v	v		
v	v	v	**t**	**t**	**t**

TABEL 14
Hüpoteetilise süllogismi (3.6.3) kehtivus

Siin on kokku neli erinevat võimalust, kuidas eeldused *(A → B)* ja *(B → C)* saavad olla korraga tõesed: *1.*, *2.*, *4.* ja *8.* reas (ülal esitatud rõhutatult). Kõigil neil neljal juhul on ka tulem *(A → C)* tõene. **Seega järeldus (3.6.3) kehtib.**

NÄIDE 3. Uurime mittekehtivat järeldust

$$\begin{array}{c} A \vee B \\ A \\ \hline \sim B \end{array} \qquad \mathbf{(3.6.4)}$$

Näiteks detektiiv eeldab, et kokk ja/või kelner on mõrvar. Seejärel jõuab ta eeldusele, et kokk on mõrvar. Siit järeldab ta, et kelner mõrvar ei ole. – Selline järeldus pole aga range. Detektiiv ei eeldanud, et *kas* kokk või kelner on mõrvar. Tema esimene eeldus ei välistanud võimalust, et kokk ja kelner sooritasid mõrva üheskoos.[71]

Tõesustabel tuleb siin selline (vt *Tabel 15* allpool):

		eeldused		**tulem**
A	**B**	**A v B**	**A**	**~B**
t	t	t	t	v
v	t		v	
t	v	**t**	**t**	**t**
v	v		v	

kontranäide

TABEL 15
Mittekehtiv järeldus (3.6.4)

Vaid *1.* ja *3.* reas (ülal rõhutatud) on kõik eeldused tõesed. Ent tulem ~*B* ei ole mõlemal juhul tõene. Kuigi *3.* reas on tõene ka tulem, on ta *1.* reas väär. Seega *1.* rida annab meile **KONTRANÄITE – olukorra, milles eeldused on tõesed, aga tulem väär. Niisiis järeldus (3.6.4) ei kehti.**

Seejuures pole oluline, kas *1.* rea olukord – milles *A* ja *B* on mõlemad tõesed – saab tegelikult realiseeruda. Loogika ei tegele faktiküsimustega. Kui tõesti soovitakse eeldada, et *1.* rea olukord ei leia aset, tuleb järelduse (3.6.4) eeldustele avalikult lisada uus eeldus: ~*(A & B).*

Üldjuhul võib kontranäiteid olla rohkem kui üks. Ent piisab ühe kontranäite esitamisest, näitamaks, et järeldus ei kehti.

Üksikute näidete abil ei saa aga tõestada järelduse kehtivust. Et tõestada järelduse kehtivust, tuleb läbi kontrollida *kõik* sellised read, milles kõik eeldused on tõesed.

Ülaloleva tabeli puhul oleks ka väär ütelda, et järeldus kehtib kolmandas reas, ei kehti aga esimeses reas. Kui järeldus kehtib, siis on *igas* reas, milles kõik eeldused on tõesed, tõene ka tulem.

LAUSEARVUTUSE LOOGILISED SAMAVÄÄRSUSED

Kaks valemit p *ja* q *on loogiliselt samaväärsed* (p = q) *parajasti siis, kui on loogiliselt võimatu, et neil valemeil on erinevad tõeväärtused.* **(3.6.5)**

Siit saame *LA* jaoks järgneva kriteeriumi:

Lausearvutuses on valemid p *ja* q *samaväärsed parajasti siis, kui ühises tõesustabelis on neil ühesugused lõpptulbad.*[72] **(3.6.6)**

[71] Käesolev näide demonstreerib, et mitterangeid järeldusi tohib teha. Lihtsalt ei tohi arvata, et järeldus (3.6.4) on range. On aga täiesti mõistlik arvata, näiteks, et on *vähetõenäoline*, et mõrvareid on kaks.

[72] Kohmakam viis on näidata, et valem *(p ↔ q)* on tautoloogia.

Kui aga tõesustabelis leidub rida, milles võrreldavate valemite *p* ja *q* tõeväärtused on erinevad, siis oleme leidnud *kontranäite* (*vastunäite*) väitele, et need valemid on samaväärsed. Kontranäite esitamisega näitamegi lausearvutuses, et samaväärsus ei kehti: $p \neq q$.[73]

NÄIDE 4. Näitame, et kehtib üks nn *De Morgani seadustest* (lühend: DeM):

$$\sim(A \vee B) = \sim A \ \& \sim B \qquad \textbf{(3.6.7)}$$

Näiteks väite *See pole tõsi, et kokk ja/või kelner on mõrvar*, tõesustingimused on täpselt samad, mis väitel *Ei kokk ega kelner ole mõrvar.*

Arvutuste lõpptulemused on järgnevad (vt *Tabel 16* allpool):

A	B	~(A v B)	~A & ~B
t	t	**v**	**v**
v	t	**v**	**v**
t	v	**v**	**v**
v	v	**t**	**t**

TABEL 16
De Morgani seaduse (3.6.7) kehtivus

Vasak- ja parempoolne tulp ühtivad. **Seega valemid ~*(A v B)* ja *(~A & ~B)* on samaväärsed.**

Valemid p *ja* q *on samaväärsed* (p = q) *parajasti siis,*
kui esimesest valemist järeldub teine ja teisest järeldub esimene –
kui järeldus on mõlemapidine: $(p \Rightarrow q) \ \& \ (q \Rightarrow p)$ **(3.6.8)**

Antud näite (3.6.7) puhul on mõlemad järeldused kehtivad:

$$\sim(A \vee B) \Rightarrow \ \sim A \ \& \sim B; \qquad \sim A \ \& \sim B \Rightarrow \ \sim(A \vee B) \qquad \textbf{(3.6.9)}$$

Üldjuhul aga järeldus mõlemapoolne ei ole. Näiteks väitest (*A & B)* järeldub küll väide *A*, ent väitest *A* väide (*A & B)* ei järeldu.

Loogiliselt samaväärsete valemitena esitatud väiteid võib teatud piires pidada sama mõttega väiteiks – sest milline maailm ka poleks, kui üks neist väiteist on tõene, on seda paratamatult ka teine.

ASENDUSVÕTE võimaldab meil *LA* valemis samaväärseid alamavaldisi üksteisega asendada, saades esialgse valemiga samaväärse valemi. Näiteks *A & B = B & A*. Seega valemis *(B & A) v C* võime avaldise (*B & A)* asendada avaldisega (*A & B)*, saades esialgsega samaväärse valemi:
(A & B) v C = (B & A) v C. Võrdusmärk töötab siin täpselt samamoodi nagu matemaatikas.

NÄIDE 5. Uurime, kas valemid

$$\sim(A \vee B) \text{ ja } (\sim A \vee \sim B) \qquad \textbf{(3.6.10)}$$

on loogiliselt samaväärsed. Saame järgmise tõesustabeli (vt *Tabel 17* allpool):

[73] Konkreetsete väidete tähendused või ka predikaatarvutus võivad aga ilmsiks tuua täiendavaid loogilisi seoseid, mistõttu kaks väidet võivad ikkagi osutuda samaväärseiks, isegi kui nende esialgsed valemid seda ei näita.

A	B	~(A v B)	~A v ~B
t	t	v	v
v	t	**v**	**t**
t	v	**v**	**t**
v	v	t	t

kontranäide

TABEL 17
Mittesamaväärsed valemid (3.6.10)

Näeme, et saadud kaks tulpa ei ole täpselt ühesugused. *2.* ja *3.* rida (ülal rõhutatud) annavad meile **KONTRANÄITED.** Seega need kaks valemit ei ole (*LA*-s) loogiliselt samaväärsed:

$$\sim(A \text{ v } B) \neq \sim A \text{ v } \sim B \qquad \textbf{(3.6.11)}$$

Üldjuhul võib kontranäiteid olla rohkem kui üks (nagu ülal ongi). Vääramaks väidet, et antud kaks valemit on loogiliselt samaväärsed, piisab aga ühe kontranäite esitamisest (ülal *3.* rida).

Kontranäite abil saab näidataa, et valemid pole samaväärsed. Üksikute näidetega ei saa aga näidata, et valemid on samaväärsed. Samaväärsuse näitamiseks tuleb tulpasid võrrelda *kõikides* ridades.

Kahel väitel, mis on esitatud loogiliselt mittesamaväärsete valemitega, ei pruugi olla täpselt üks ja sama mõte, sest teatavates (kas või kujuteldavates) olukordades võiks üks neist väidetest olla tõene, teine aga väär. Näiteks *2* väidet

Sajab vihma;
Sajab vihma või lund,

ei olegi täpselt sama mõttega, sest juhul, kui sajab lund, aga vihma mitte, on teine väide tõene, sellal kui esimene väide on väär. Seejuures pole oluline, kas need väited on lausutud piirkonnas, kus looduslikel põhjustel lund sadada ei saagi.

3.7. Tuletused

Tuletused

Eelmises paragrahvis uurisime, kuidas tõesustabelitega tõestada järeldusreeglite kehtivust. Näiteks tõestasime, et loogikareegliteks on disjunktiivne süllogism $(A \text{ v } B) \,\&\, \sim B \Rightarrow A$ (3.62) ja hüpoteetiline süllogism $(A \rightarrow B) \,\&\, (B \rightarrow C) \Rightarrow (A \rightarrow C)$ (3.6.3).

Definitsioonist tulenevalt on loogilistel järeldustel aga järgmine omadus: kui esimesest väitest *p* järeldub teine väide *q* ja teisest väitest *q* omakorda järeldub kolmas väide *r*, siis järeldub see kolmas väide *r* ka esimesest väitest *p.* Sellist omadust nimetatakse *transitiivsuseks*[74]*:*

Loogilised järeldused on transitiivsed: kui p ⇒ q *ja* q ⇒ r, *siis* p ⇒ r. **(3.7.1)**

Seega: kui oleme tõesustabelitega tõestanud mõned järeldusreegleid, siis võime neid reegleid rakendada järjestikku – tõestades nõnda ka selliste järelduste kehtivust, mida me tõesustabelitega veel tõestanud ei ole. Järeldusreeglite üksteise järel rakendamist nimetataksegi *tuletuseks.*[75]

---

[74] Ka näiteks aritmeetiline võrratus on transitiivne: kui $x > y$ ja $y > z$, siis $x > z$.

[75] Ma ise eelistaksin öelda, et vastuolust ei järeldu midagi, küll aga saab vastuolust midagi mänguliselt tuletada – umbes nii, nagu aritmeetikas nulliga jagada (vt Eintalu 1996).

NÄIDE 1. Analüüsime olukorda, mis tekkis füüsikas XX sajandi alul. Tähistame:

N – Newtoni seadused kehtivad.
G – Galilei teisendused kehtivad.
C – Valguse kiirus on konstantne (so taustsüsteemist sõltumatu).
M – Michelson-Moore'i eksperiment on korrektselt sooritatud.

Matemaatiliste arvutuste põhjal eeldasid füüsikud järgmist: 1. Kui Newtoni seadused kehtivad, siis kehtivad ka Galilei teisendused: $(N \rightarrow G)$; 2. Kui Galilei teisendused kehtivad, siis pole valguse kiirus konstantne: $(G \rightarrow \sim C)$; 3. Kui Michelson-Moore'i eksperiment on korrektselt sooritatud, siis on valguse kiirus konstantne: $(M \rightarrow C)$. Lisaks sellele eeldasid mitmed füüsikud, et: 4. Michelson-Moore'i eksperiment on korrektselt sooritatud: *M*.

Järgnevalt kirjutame need eeldused joone peale, joone all aga tuletame väite, mis neist eeldustest järeldub – nimelt, et Newtoni seadused ei kehti: $\sim N$.

1. $N \rightarrow G$			
2. $G \rightarrow \sim C$			
3. $M \rightarrow C$			
4. M	tuletada: $\sim N$		**(3.7.2)**
5. C	3,4	MP	
6. $\sim\sim C$	5	DN	
7. $\sim G$	2,6	MT	
8. **$\sim N$**	1,7	MT	

Siin joone all iga väide on järeldatud temast ülevalpool olevaist väiteist. Paremal pool on numbritega näidatud, milliste ridade väiteist nimelt on järeldus tehtud. Lühenditega on näidatud, millist järeldusreeglit (mille kehtivus on tõesustabeliga tõestatud) on seejuures kasutatud.

Näiteks *8.* rea väide $\sim N$ on järeldatud *1.* ja *7.* rea väidetest $(N \rightarrow G)$ ja $\sim G$. Kasutatud on reeglit *Modus Tollens* (*MT*), mille kehtivus on tõesustabeliga tõestatud: $(N \rightarrow G)\ \&\ \sim G \Rightarrow \sim N$.

Loomulik tuletussüsteem

Loomulik tuletussüsteem on kehtivate järeldusreeglite kogum, millest piisab mis tahes *LA* kehtiva järelduse tuletamiseks ja mille reeglid on intuitiivselt mõistetavad (vt *Tabel 18* allpool):

A) Tuletusreeglid	**B) Asendusreeglid**
$p \& q$ _____ Simp p p q _____ Conj $p \& q$ $p \to q$ p _____ MP q $p \to q$ $\sim q$ _____ MT $\sim p$ $p \vee q$ $\sim p$ _____ DS q $p \to q$ $q \to r$ _____ HS $p \to r$ p ____ Add $p \vee q$ $p \to q$ $r \to s$ $p \vee r$ _____ CD $q \vee s$	$p \& q = q \& p$ Comm $p \vee q = q \vee p$ $p \& (q \& r) = (p \& q) \& r$ Assoc $p \vee (q \vee r) = (p \vee q) \vee r$ $p \& (q \vee r) = (p \& q) \vee (p \& r)$ Dist $p \vee (q \& r) = (p \vee q) \& (p \vee r)$ $p = p \& p$ Red $p = p \vee p$ $p = \sim\sim p$ DN $\sim(p \& q) = \sim p \vee \sim q$ DeM $\sim(p \vee q) = \sim p \& \sim q$ $p \to q = \sim p \vee q$ CE $p \to q = \sim q \to \sim p$ Contra $(p \& q) \to r = p \to (q \to r)$ Exp $p \leftrightarrow q = (p \to q) \& (q \to p)$ Bic $p \leftrightarrow q = (p \& q) \vee (\sim p \& \sim q)$ **C) Lisareeglid** p * q _____ r H1 * s $r \to s$ CP p * q ____ r H1 * $s \& \sim s$ C $\sim r$ IP

TABEL 18
Loomulik tuletussüsteem

Lühendid
Tabelis 18 ülal oleme kasutanud järgmisi ingliskeelseid lühendeid:

Simp – Simplification (lihtsustamine)
Conj – Conjunction (konjunktsiooni sissetoomine)
MP – Modus Ponens
MT – Modus Tollens
DS – Disjunktiivne Süllogism
HS – Hüpoteetiline Süllogism
Add – Addition (lisamine)
CD – Konstruktiivne Dilemma

Comm – Kommutatiivsus
Assoc – Assotsiatiivsus
Dist – Distributiivsus
Red – Redundancy (liiasuse reegel)
DN – Double Negation (kahekordne eitus)
DeM – De Morgani seadused
CE – Conditional Echange (implikatsiooni lahtikirjutamine)
Contra – Contraposition (implikatsiooni ümberpööramine)
Exp – Exportation (implikatsiooni väljatoomine)
Bic – Biconditional (ekvivalents on kahesuunaline implikatsioon)

CP – Conditional Proof (tingimuslik tõestus)
IP – Indirect Proof (kaudne tõestus)
H_1 – Hüpotees 1
C – Contradiction, explicit (ilmutatud vastuolu kujul *s & ~s*)

NÄIDE 2. *CP* ehk *tingimusliku tõestuse* abil saab näidata, et antud eeldustest järeldub teatud implikatsioon. Toome järgnevalt näite selle tuletusreegli kasutamisest.

Näitame, et eeldustest *(A → B)* ja *(B → C)* järeldub implikatsioon *(A → C)*.[76] Seda saab teha nii:

1. A → B			
2. B → C	tuletada: A → C		**(3.7.3)**
3. A	H_1		
4. B	1,3 MP	**vahearvutus**	
5. C	2,4 MP		
6. **A** → **C**	3–5 CP		

Reas *3* toome sisse uue väite *A – 1. hüpoteesi* (antud tuletuses rohkem hüpoteese ei esinegi). Hüpotees on siin *tinglik lisaeeldus*, mis lisatakse kahele eeldusele joone pealt. Me ei eelda, et hüpotees on tõene. Me lihtsalt vaatame, mis siis juhtuks, *kui* ta oleks tõene.

Reas *5* näeme, et siis oleks tõene ka väide *C*. – Nii olemegi tõestanud, et antud kahe eelduse tõesuse korral: KUI *A* oleks tõene, SIIS oleks tõene ka *C*. Seega antud kahest eeldusest järeldub implikatsioon *(A → C)*.

Reas *6* oleme näidanud, et ridades *3 – 5* oleme arvutanud *CP*-reegliga ja jõudnud reas *6* tulemusele. Edasises võimalikus arvutuses veel allapoole ei tohiks ridasid *3 – 5* nüüd enam kasutada, sest väidet *A* oli eeldatud vaid tingimuslikult ja vahearvutuses. See ridade blokk, mida edaspidi ei tohi enam kasutada, on ülal joonega haardesse võetud.

[76] Seega on siin eesmärgiks tõestada *HS* (*Hüpoteetiline Süllogism*) kehtivust, kasutades aga teisi reegleid.

NÄIDE 3. ***IP*** **ehk** ***kaudse tõestuse*** abil saab näidata, et antud eeldustest järeldub väide *p.*[77]

Väite p *tuletamiseks oletame vastuväiteliselt, et* ~p *ja näitame siis,*
et antud eeldustest, ühes hüpoteesiga ~p, *järeldub ilmutatud vastuolu* s & ~s.

Näitame taas, et väidetest *(A → B)* ja *(B → C)* järeldub *(A → C).* Seda saab teha ka nii:

1. A → B			
2. B → C	tuletada: A → C		**(3.7.4)**
3. ~(A → C)	H1		
4. ~(~A v C)	3 CE		
5. ~~A & ~C	4 DeM		
6. A & ~C	5 DN		
7. A	6 Simp		
8. ~C	6 Simp	**vahearvutus**	
9. B	1, 7 MP		
10. ~B	2, 8 MT		
11. B & ~B	9, 10 Conj **C**		
12. **A → C**	3–11 IP		

Reas *3* toome sisse *hüpoteesi 1*, et tuletatav väide *(A → C)* on väär.

Reas *11* näeme, et antud eeldustest ja tehtud hüpoteesist järeldub vastuolu ***(C** – contradiction).*

Reas *12* kirjutame, et antud eeldustest järeldus väide *(A → C).* Ridades *3 – 11* tegime vahearvutuse *IP*-reegliga, kasutades hüpoteesi. Edasises võimalikus arvutuses veelgi allapoole ei tohi neid ridasid enam kasutada. See ridade blokk, mida ei tohi enam kasutada, on joonega haardesse võetud.

Tuletussüsteemi omadusi

Tõesustabelid annavad lausearvutuse jaoks *algoritmi.* Mis tahes *LA* ülesannet saab tõesustabelitega mehhaaniliselt lahendada. Me võime programmeerida arvuti tõestusabelitega arvutama ja varem või hiljem jõuab ta õigele tulemusele.

Ent käsitsi tõesustabelitega arvutamine on aeglane. Ka satume siin paberipuudusesse juba juhul, kui komponentväiteid on rohkem kui *3.*

Loomuliku tuletussüsteemiga õnnestub eesmärk saavutada tihti märgatavalt kiiremini ja väiksema paberikuluga. Samuti tunduvad selle tuletussüsteemi reeglid ja ka tuletused ise intuitiivselt arusaadavamad kui tõesustabelid.[78]

Ent tuletussüsteemis puudub algoritm – tuletussüsteem ei ole *lahenduv.* Iga kehtiva järelduse kehtivust on küll võimalik tuletusega tõestada, pole aga ette teada, kuidas. Kui soovitav tulem õnnestub eeldustest tuletada, siis järeldus kehtib. Ent võib juhtuda, et see ei õnnestugi. Sel juhul jääb ka teadmata, kas järeldus ei kehti või lihtsalt ei õnnestunud tema kehtivust tõestada.

Etteantud väite tuletamine etteantud eeldustest on mõistatus. See nõuab leidlikkust ja teritab mõistust nagu maleülesannete lahendamine. Kahjuks on sageli loengu- ja harjutustunde nõnda vähe, et tuletustest ei jõua isegi rääkida.

Tuletussüsteemis realiseerub Leibnizi (1646 – 1716) unistus sooritada loogilisi järeldusi samal moel, nagu sooritatakse aritmeetilisi rehkendusi (vt nt Wright 1982: 39–62).

[77] *Kaudne tõestus* ehk *vastuväiteline tõestus* on sama asi, mis arutlusvõte *reductio ad absurdum.* Siin tuleb aga rõhutada, et kuigi loogikud räägivad tihti nii tingimuslikust kui ka kaudsest „tõestusest“, on TULEMI *tõestusega* tegemist ikkagi vaid siis, kui tuletuse eeldused on tõesed ning nende tõesus on ka teada. – Vt Ptk 1. Kui tuletuse eeldused on väärad või nende tõesus pole teada, siis tõestab tuletus ikkagi vaid järelduse *kehtivust.*

[78] Kuigi tõesustabeleid peetakse nüüd loogika aluseks, leiutati nad hiljem kui mitmesugused tuletussüsteemid.

3.8. Teksti analüüs

Tekstile loogilise mudeli konstrueerimine

Et formaalloogika abil analüüsida teksti,
tuleb uuritav tekst esmalt tõlkida ehk interpreteerida loogikasümbolite keelde.
Alles seejärel saab nõnda loodud loogilisele mudelile *rakendada formaalloogikat.*

Kuigi loogikud sageli kinnitavad, et loogika annab mõttele ülima täpsuse, tuleb siiski meeles pidada, et teksti viimine loogika sümbolkeelde on *tõlkimine* – samasugune tõlkimine nagu näiteks tõlkimine eesti keelest inglise keelde. Tõlkides võib mõte moonduda. Tõlkimine on alati interpreteerimine, tõlgendamine – olemata seega täiesti mehhaaniline ja täpne protsess.

Seetõttu ei saa tulemust, mis saadi teksti loogilise mudeli analüüsimisel,
automaatselt rakendada esialgsele tekstile, mis oli selle mudeli aluseks.

Näiteks võib formaalloogiline analüüs tuvastada: „Uuritav loogiline mudel on vastuoluline.“ – Siiski on vastuolu täie rangusega kindlaks tehtud vaid kasutatud *mudelis.* Otsustamaks, et ka uuritav mõttekäik ise on vastuoluline, tuleb kindel olla, et vastuolu pole lisandunud tõlkimise käigus.

Sellest hoolimata saab loogika (nagu ka matemaatika) abil palju kasulikku teha. Näiteks võib loogiline analüüs ilmutada, et uuritav tekst pole täpse mõttega.

Et vähendada vigu formaalloogiliste mudelite kasutamisel, vajame lisateadmisi.

Indikaatorid

Lausearvutuse *loogilised konnektiivid* on sümbolid, millega tähistatakse loogikatehteid. Näiteks konjunktsiooni tehet tähistame märgiga *&*. Kõnekeeles esinevad aga *grammatilised konnektiivid* ehk sidesõnad nagu *ja*, *ning*, *ega* ja *või.* Samuti esinevad siin mitmesugused tüüpilised sõnakombinatsioonid nagu näiteks *kui ... siis ...*

Indikaatorid on *sõnad, sõnakombinatsioonid vms,*
mis võivad osutada loogikatehteile.

Näiteks *ja* on indikaatorsõna, sest ta võib osutada konjunktsioonile *&*. Sõnakombinatsioon *kui ... siis ...*, on aga indikaator, mis võib osutada implikatsioonile →. Lause *Kui päike paistab, siis vesi soojeneb*, võimegi suurema veata tõlkida kujule (*Päike paistab. → Vesi soojeneb).*

Siiski pole indikaatoreist juhindumine automaatne protseduur. Indikaatorid on pigem nagu haiguse süptomid. Sümptomi esinemise korral kaalutleb arst, kas tegemist on vastava haigusega. Ent sümptom võib esineda ka ilma vastava haiguseta.

Indikaatorid võivad, aga ei pruugi tähistada loogikatehteid.

Näiteks lauses *Jaan ja Jüri on sõbrad*, ei tähista sõna *ja* konjunktsiooni *&* – muidu järelduks siit ju absurdne lause *Jüri on sõber.*[79]

Siit näeme ka, et teksti loogilise analüüsimisega tegeleme me varjatult juba tema loogikakeelde tõlkimise käigus – selleks, et teda paremini tõlkida.

Kuid nüansse on enamgi.

Loogikatehteid ei märgi ainult tüüpilised sõnad ja sõnakombinatsioonid.

[79] Siin on meil tegemist mitte *omadusega*, vaid *seosega*, mida võimaldab analüüsida alles predikaatarvutus.

Näiteks *punkt* ja *koma* võivad samuti osutada konjunktsioonitehtele *&*. Tekstilõigus *Päike paistab. Tuul puhub*, esitabki punkt konjunktsiooni.

Mõned tüüpilised grammatilised kombinatsioonid viitavad aga loogikatehteile, mida me pole (loomulikus tuletussüsteemis) defineerinud.

Mõned sõnakombinatsioonid osutavad tuntud loogikatehete kombinatsioonidele.

Näiteks väljend *kas ... või ...*, osutab mittevälistava *või* asemel hoopis välistavale *või*-le – seega mitte disjunktsioonile *v*, vaid veidi keerulisemale avaldisele. Nimelt: väide „Kas *A* või *B*," kus *A* ja *B* on väited, esitub lausearvutuses valemi *(A v B)* asemel hoopis järgnevalt:

$(A \vee B) \ \& \ {\sim}(A \ \& \ B)$ **välistav „või"** **(3.8.1)**
„Kas *A* või *B*."

Ja samuti tasub meeles pidada järgmist:

Mõned tüüpilised sõnad ja sõnakombinatsioonid ei osuta loogikatehteile.

Näiteks sõnakombinatsioon „... sest et ..." võib väljendada põhjuslikku seost, mis aga ei väljendu loogikatehtena. Selle tõlkimisel lihtsal implikatsiooniks → läheb osa olulist informatsiooni kaduma, kusjuures sisse võib tulla ka otsene viga.

Tüüpilisi indikaatoreid

KONJUNKTSIOONI *&* võivad tähistada sidesõnad *ja*, *ning*, *ent*, *kuid*, *aga.*[80] Konjunktsiooni võivad tähistada ka *punkt* ja *koma.*

DISJUNKTSIOONI *v* tähistab tavaliselt sidesõna *või.* Seejuures väljend „Kas *A* või *B*" tõlgitakse hoopis valemiks $(A \vee B) \ \& \ {\sim}(A \ \& \ B)$.

IMPLIKATSIOONI → võivad tähistada väljendid *„kui ... siis ..."*; *„... ainult siis, kui ..."*; *„piisav tingimus"*; *„tarvilik tingimus".*

Väljendi *„kui ... siis ..."* esitamisel implikatsioonina tuleb sisse väike viga, mis enamasti oluline ei ole. Väljendi *„kui oleks (olnud) ... siis oleks (olnud) ..."* esitamisel implikatsioonina võib aga sisse lipsata oluline viga. Adekvaatse loogilise mudeli loomine on siin omaette teadus.[81]

Lause „*A* ainult siis, kui *B*," on samaväärne lausega „Kui *A*, siis *B*," mille saab esitada implikatsioonina $(A \rightarrow B)$. See on ka sama, mis ütelda, et väites *A* kirjeldatu on väites *B* kirjeldatu *piisav* tingimus; või ütelda, et väites *B* kirjeldatu on väites *A* kirjeldatu *tarvilik* tingimus.

JÄRELDUST ⇒ võivad tähistada väljendid *järelikult*, *seega*, *niisiis* (lähemalt vt nt (Halverson 1984: 38–41)). Iseküsimus, kas tekstis taheti osutada just rangele järeldusele.

EKVIVALENTSI ↔ võivad tähistada väljendid *„... parajasti siis, kui ..."*; *„... siis ja ainult siis, kui ..."*; *„ühekorraga"*; *„tarvilik ja piisav tingimus".*[82] Ekvivalentsitehtega on tegemist näiteks terminite *definitsioonides.*

---

[80] Selgituse anname järgmises alajaotuses *Minimaalse interpretatsiooni printsiip.*

[81] Tegemist on nn *kontrafaktuaalidega*, mida on peale 2. maailmasõda uuritud (vt nt Lewis 1986).

[82] $(A \rightarrow B)$ on ing k: **If** *A*, **then** *B*. $(A \leftrightarrow B)$ on ing k: *A*, **if and only if** *B*. Teaduskirjanduses kasutatakse siin aga lühendit „IFF": $(A \leftrightarrow B) = A$ **IFF** *B*.

Minimaalse interpretatsiooni printsiip
Teksti tõlkimisel sümbolkeelde soovitatakse mõnikord juhinduda järgmisest printsiibist:

MINIMAALSE INTERPRETATSIOONI PRINTSIIP nõuab,
et tekstile loogilise mudeli koostamisel loeksime tekstist välja ainult seda informatsiooni,
mida sealt eksimatult välja saab lugeda.

Teksti analüüsimisel loeme sealt välja vaid selliseid väiteid, mis on tekstis *ilmutatult* ehk *eksplitsiitselt* esitatud. Teatud mõttes lähtume süütuse presumptsioonist: kuni pole tõestatud, et tekstiga on mõeldud seda-ja-seda, ei eelda me, et seda on tegelikult mõeldud. Niisiis teksti loogilisel analüüsimisel väldime me alltekstide või tagamõtete või varjatud eelduste omistamist.[83]

NÄIDE 1. Vaatleme järgmist lauset:

Jack läheb kinno või teatrisse. **(3.8.2)**

Selles lauses on grammatiliseks konnektiiviks, mis võib osutada loogikatehtele, sidesõna *või.* See lause näib koosnevat kahest komponentväitest, mida tähistame vastavalt tähtedega *A* ja *B:*

A – Jack läheb kinno.
B – Jack läheb teatrisse.

Nüüd aga märkame, et lause (3.8.2) jaoks on meil kaks loomulikku loogilist mudelit.

Esimeses mudelis tõlgendame me sidesõna „või“ *mittevälistava* „või“-na – seega disjunktsioonina, mille märgiks on meil *v.* Sel juhul saame järgmise valemi:

$$A \vee B, \qquad \textbf{(3.8.3)}$$

mille täpne keeleline väljend on: *Jack läheb kinno või teatrisse või nii kinno kui teatrisse.*

Teises mudelis tõlgendame me sidesõna „või“ *välistava* „või“-na. Sel juhul saame valemi:

$$(A \vee B)\ \&\ {\sim}(A\ \&\ B), \qquad \textbf{(3.8.4)}$$

mille täpne, ühemõtteline keeleline väljend on: *Jack läheb kas kinno või teatrisse.*

Kumba mudelit peaksime eelistama? – Siin on oluline järgmine asjaolu:

Väide (3.8.4) sisaldab rohkem informatsiooni kui väide (3.8.3).

On selge, et valemi (3.8.4) saame valemist (3.8.3), lisades viimases esitatud infole *(A v B)* konjunktsiooni *&* abil täiendav informatsiooni *~(A & B).*

Minimaalse interpretatsiooni printsiibi järgi peame nüüd teksti loogilise mudelina eelistama valemit (3.8.3). Kui eelistaksime valemit (3.8.4), loeksime lausest (3.8.2) välja ebakindlat infot.

Ühtlasi selgub, miks me ülal nimetasime sidesõnu *kuid*, *ent* ja *aga* indikaatorsõnadeks konjunktsioonile *&.* Väljend „*A*, aga *B*“ on ju loetav kui „*A* ja *B* ja *C*,“ – kus *„C“* väljendab näiteks üllatust, milles me ei saa aga eriti kindlad olla.

---

[83] Kelley (1990: 143) seevastu lähtub *armulikkuse printsiibist*, soovitades võimalusel eeldada, et analüüsitav autor mõtleb loogiliselt. Fogelin (1992: 3–5) aga kritiseerib *aleetilist armulikkuse printsiipi* – mille järgi tuleb eeldada, et enamus uuritava uskumustesüsteemi uskumusi on tõesed. Fogelin (1992: 5): „... kaugel sellest, et suurte filosoofide teostes ei esineks lihtsaid [loogilisi] prohmakaid.“ – *Autori tõlge inglise keelest.*

Minimaalse interpretatsiooni printsiibi vigane rakendamine
Esitan siin ühe printsiibi, mille vastu eksimine võib viia vigadele:

Minimaalselt tuleb interpreteerida mõtet tervikuna,
mitte selle üksikuid osasid eraldi. **(3.8.5)**

Ülalesitatud printsiip tugineb lihtsale tähelepanekule:

Kui minimaalselt interpreteerida mõtte üksikuid osasid eraldi,
siis tulemus ei pruugi olla mõtte kui terviku minimaalne interpretatsioon. **(3.8.6)**

NÄIDE 2. Vaatleme järgmist lauset:

See pole tõsi, et Jack läheb kinno või teatrisse. **(3.8.7)**

Kui siin sõna *või* interpreteerida nõrgalt disjunktsioonina, siis saame eituse („See pole tõsi, et ...“) tõttu esialgse lause (3.8.7) tugeva interpretatsiooni:

Jack ei lähe kinno ega teatrisse. **(3.8.8)**

Kui interpreteerime sõna *või* aga välistava *või*-na, saame (3.8.7) nõrga interpretatsiooni:

Jack ei lähe kinno ega teatrisse või ta läheb nii kinno kui teatrisse. **(3.8.9)**

Lausutu *loogilises* mõttes „minimaalne“ interpretatsioon võib aga *juriidilises* mõttes olla koguni „maksimaalne“ interpretatsioon – tulenevalt lausutut ümbritsevast varjatud kontekstist, mida loogik oma analüüsis ei pruukinud arvestada.

Vastuoluline tekst
Minimaalse interpretatsiooni printsiip toimib hästi siis, kui avastame tekstis vastuolu. Nimelt:

Kui väidete süsteemi alamsüsteem on vastuoluline,
siis on ka väidetesüsteem ise vastuoluline. **(3.8.10)**

Näiteks $(A \ \& \ {\sim}A)$ on vastuolu. Ent vastuolu on ka $(A \ \& \ {\sim}A) \ \& \ B$, kus B on suvaline väide. Seega:

Kui me avastame tekstis vastuolu,
kasutades minimaalse interpretatsiooni printsiipi,
siis see vastuolu säilib ka teksti rikkamates interpretatsioonides. **(3.8.11)**

Mõnikord on aga tegemist *praktilise vastuoluga*, mille ilmutamine formaalloogikas nõub *varjatud eelduste* väljakirjutamist. Nii on see näiteks tunnistajate ütluste puhul – kui üks nägi kahtlusalust teatud ajal Tartus, teine aga samal ajal Tallinnas. Et saada formaalloogilist vastuolu, peaksime välja kirjutama üldtunnustatud eelduse, et keegi ei saa olla korraga nii Tartus ja Tallinnas.

See asjaolu näitab, et minimaalse interpretatsiooni printsiip polegi ehk alati arukas töövahend.

Ruumipuudusel ei saa me siin käsitleda keerukamat, aga huvitavamat teemat – tekstina esitatud *argumentide* ja *järelduste* analüüsi. Vaata sellest aga näiteks (Kelley 1990: 77–166).

Ülesandeid

1. Millised järgmistest valemitest on tautoloogiad, millised vastuolud, millised kontingentsedvalemid? Kasutada tõesustabeleid:
   1.1. $A \rightarrow (A \vee B)$
   1.2. $(A \vee B) \rightarrow A$
   1.3. $(A \vee B)$ & $\sim A$ & $\sim B$
   1.4. $(A$ & $B) \rightarrow A$
   1.5. $A \rightarrow (A$ & $B)$
2. Tõestada, et:
   2.1. Tautoloogia eitus on vastuolu;
   2.2. Vastuolu eitus on tautoloogia;
   2.3. Kontingentse valemi eitus on kontingentne valem.
3. Millised järgmistest väidetesüsteemidest on vastuolulised, millised aga kooskõlalised? Kasutada tõesustabeleid. Kooskõlalise süsteemi puhul esitada kontranäide väitele, et süsteem on vastuoluline:
   3.1. $\{A; A \rightarrow B; \sim B\}$
   3.2. $\{A \vee B; A; B\}$
   3.3. $\{\sim A; A \rightarrow B; B\}$
   3.4. $\{A \rightarrow B; B \rightarrow \sim A\}$
4. Milliseid deduktsioone saab konstrueerida ülesande *3* vastuolulis(t)e süsteemi(de) põhjal?
5. Näidake tõesustabelitega, et loomuliku tuletusssüsteemi kõik tuletus- ja asendusreeglid (vt *Tabel 18*) on kehtivad järeldused.
6. Näidake tõesustabeliga, et "järeldus seletusele" B & $(A \rightarrow B) \Rightarrow A$ ei kehti.
7. Näidake tõesustabeliga, et ei kehti järeldus $(A \rightarrow B)$ & $\sim A \Rightarrow \sim B$.
8. Millised järgmistest järeldustest kehtivad? Kontrollida tõesustabelitega. Kui järeldus ei kehti, siis esitada väitele, et järeldus kehtib, kontranäide:
   8.1. $A \Rightarrow (A \vee B)$
   8.2. $(A \vee B) \Rightarrow A$
   8.3. $[(A \vee B)$ & $\sim(A$ & $B)$ & $A] \Rightarrow \sim B$
   8.4.
   $$\begin{array}{l} A \rightarrow B \\ A \rightarrow C \\ \underline{B \vee C\quad} \\ \quad A \end{array}$$
9. Tõestage tõesustabelitega loomuliku tuletusssüsteemi kõik asendusreeglid (vt *Tabel 18*).
10. Millised järgmistest valemitest on omavahel paarikaupa samaväärsed? Kontrollida tõesustabelitega. Kui kaks valemit pole samaväärsed, siis esitada väitele, et nad on samaväärsed, kontranäide:
    10.1. $\sim A$ & $\sim B$
    10.2. $\sim(A$ & $B)$
    10.3. $\sim C \rightarrow (\sim A \vee \sim B)$
    10.4. $A \rightarrow (B \rightarrow C)$
11. Näidake tõesustabeliga, et asendusvõtet $(A \vee B) = (B \vee A)$ võib kasutada järgmises valemis: $(A \vee B) \rightarrow C = (B \vee A) \rightarrow C$.
12. Esitage järgmised laused lausearvutuse sümbolkeeles:
    12.1. Kui mul raha ei jätku, siis ma endale autot ei osta.
    12.2. Täisarvu nimetatakse paarisarvuks siis ja ainult siis, kui ta jagub kahega.
    12.3. Ei Jaan ega Peeter ole päikesevarjutust näinud.
    12.4. Vihma sajab vaid siis, kui ilm on pilvine.
    12.5. Kui vihma sajab, siis ma jään koju või võtan takso.

13. Millised järgmistest tekstidest on vastuolulised? Vajaduse korral sõnastage varjatud eeldus.

13.1. See arv on algarv, kuid ta pole algarv.
13.2. Ta oli sel kellaajal Tartus või Pärnus. Ta oli sel kellaajal nii Tartus kui Pärnus.
13.3. Kui mul on raha, siis ma ostan maja. Kui ma ostan maja, siis mul enam raha pole.
13.5. Dickensoni romaani peategelane ilmus oma sõbra pulma pärast iseenda matuseid. Tal oli halb tuju, sest ta oli juba 20 aastat mulla all olnud.

14. Kas järgmised laused on loogiliselt samaväärsed ja seega sama mõttega?

14.1. Ma kas pole Iraani president või ma söön oma püksid ära;
14.2. Ma söön oma püksid ära sel ja ainult sel tingimusel, et ma olen Iraani president.

15. Näidake tuletussüsteemiga, et järgmine järeldus on kehtiv[84]:

Oletame, et Jumal on olemas. Kui ta on olemas, siis on ta täiuslik. Kui ta on täiuslik, siis ta teab kõike, suudab kõike ja on heatahtlik. Kui ta kõike teab ja kurjus on olemas, siis ta teab kurjuse olemasolu. Kui ta kõike suudab, siis suudab ta kurjust kaotada. Kui ta on heatahtlik, siis ta soovib kurjust kaotada. Kui ta teab kurjuse olemasolu, suudab ja soovib kurjust kaotada, siis ta kaotab kurjuse. Kui ta kaotab kurjuse, siis kurjust pole olemas. Kurjus on olemas. Seega Jumalat pole olemas.

Kirjandust

Cryan jt (2003) *Juhatus loogikasse (*Tln: KOGE), lk 19–48.

Eintalu (2006) *Loogika näidisülesanded ja harjutused* (Tln: Sisekaitseakadeemia), lk 15–61.

Forbes (1994) „Classical Sentential Logic." In his *Modern Logic: A text in elementary symbolic logic* (NY & Oxford: Oxford UP), pp 3–145.

Grauberg (1996) *Loogika, keel ja mõtlemine* (Tln: Tallinna Bakalaureuse Erakool), lk 48–56.

Guttenplan (1986) „Translating into Sentential." In his *The Languages of Logic: An introduction* (Oxford & NY: Blackwell), pp 105–23.

Kelley (1990) „Propositional Logic." In his *The Art of Reasoning with Symbolic Logic* (London & NY: W. W. Norton & Company), pp 265–312.

Meos (2003a) *Loogika, argumentatsioon, mõtlemiskultuur* (Tln: Koolibri), lk 36–69.

Tamme jt. (1997) *Loogika. Mõtlemisest tõestamiseni.* Tartu: TÜ Kirjastus. – Siit peatükid: „3. Lausearvutus" (lk 65–93) & „5. Klassikalised tuletusreeglid" (lk 130–167).

Tarski (1965) *Introduction to Logic and to the Methodology of Deductive Sciences.* NY: Oxford UP.

Vuks (1999) *Traditsiooniline formaalne loogika* (Tartu: Sihtasutus Iuridicum), lk 97–112.

Зегет (1985) *Элементарная логика* (М: Высшая школа), сс 39–116.

[84] Sarnane arutluskäik on tuntud *kurjuse probleemina.* Umbes nõnda arutles Epikuros (341 – 270 ema). Epikurose argumenti kirjeldab Voltaire (1694 – 1778) oma *Filosoofilises sõnaraamatus* (Voltaire 1986: 91–2).

4. PREDIKAATARVUTUSE ALGED

Lausearvutuse vahenditega saime analüüsida, kuidas uuritav väide koosneb komponentväidetest, mis on ühendatud loogiliste konnektiividega. Grammatikas vastab sellele liitlause koosnemine alamlausetest, mis on ühendatud sidesõnadega.

Kuid paljud laused omavad sügavamat loogilist struktuuri, mida ei saa avada, kasutades üksnes lausearvutuse vahendeid. Väited on väidetud *millegi kohta* – ja selle millegi kohta väidavad nad *midagi.* Sellise täiendava struktuuri uurimisega tegelebki *predikaatarvutus.*

Predikaatarvutuses jäävad kehtima kõik lausearvutuse tähistused ja reeglid. Samas tuleb juurde rida uusi tähistusi ja reegleid.

4.1. Subjektid ja predikaadid, omadused ja seosed

Subjektid

Subjektiks nimetatakse predikaatarvutuses seda, mille *kohta* midagi öeldakse. Subjekt on loogiline alus. Subjekt on „allolev“ – see, mille „peale“ pannakse ütluses mingi omadus, seos vms. Grammatikas vastab subjektile näiteks *alus*, ent ka *sihitis.*

Subjekt on tavaliselt konkreetne asi, indiviid või isik (näiteks: *see vaas siin laual* või *John Kennedy*). Grammatilised *pärisnimed* osutavad kindlasti sellistele subjektidele.

Kõnekeeles on tavaks nimetada „subjektiks“ kõnealust isikut, „objektiks“ aga kõnealust asja. Kuid loogikas nimetatakse neid ühtviisi subjektideks.

Kui kõnekeeles algavad pärisnimed suure algustähega, siis *predikaatarvutuses on tavaks tähistada subjekte väikeste tähtedega alates tähestiku algusest:*

$$a, b, c, d, \ldots \text{ jne.}$$

Näiteks võime tähistada järgnevalt[85]:

a – John Kennedy;
b – George Bush;
c – Washington. **(4.1.1)**

Predikaadid

Predikaadiks nimetatakse predikaatarvutuses seda, *mida* subjekti või subjektide kohta öeldakse. *Praedicātum* tähendab ladina keeli: „avalikult teatatu“. Grammatikas vastavad predikaatidele näiteks *öeldis* ja ka *määrus.*

Predikaati nimetatakse *ühekohaliseks*, kui temaga täislause moodustamiseks piisab, kui omistame selle predikaadi ühele subjektile. Predikaat on *kahekohaline*, kui täislause mooodustamiseks tuleb nimetada kaht subjekti. Üldiselt võib predikaat olla n-kohaline, kus n on mistahes naturaalarv.[86]

Predikaat ei tähista konkreetset asja, indiviidi või isikut. Niisiis ei vasta predikaatidele need asjad, mida kõnekeeles nimetame pärisnimedega.

---

[85] Ülesannete lahendamisel tuleb kasutuselevõetud märkide – nagu *a*, *b*, *c*, ... jne – tähendused, kui need olemas on, alati samal moel täpselt välja kirjutada.

[86] Analoogiliselt räägitakse matemaatikas ühe-, kahe- ja ka n-muutuja funktsioonidest.

Omadused
Ühekohaline predikaat võib olla *omadus*, *liik*, *hulk* või *mõiste*. Grammatikas vastavad *üldnimed* (n: „... on inimene“ või „... on roheline“ või „... on paarisarv“) sellistele predikaatidele.

Seosed
Kahekohaline predikaat on *seos* ehk *relatsioon* kahe subjekti vahel (n: „... on suurem kui ...“).

Suuremakohalisi predikaate tavaliselt ei käsitleta, kuigi neid kõnekeeleski esineb (näiteks lauses *Juku kinkis Marile kella*, on kolm subjekti: *Juku*; *Mari*; ja *(see) kell* – ning seega on siin tegemist *3*-kohalise predikaadiga).

Predikaatide tähistamine
Kui kõnekeeles on omadused ja üldnimed enamasti väikese algustähega, siis *predikaatarvutuses on tavaks saanud predikaate tähistada suurte tähtedega alates tähestiku algusest:*

$$A, B, C, D, \ldots \text{ jne.}$$

Näiteks võime tähistada[87]:

$$\begin{aligned} &Px - x \text{ on pikk;} \\ &Lx - x \text{ on lühike;} \\ &Ixy - x \text{ imetleb } y\text{-t.}^{88} \end{aligned} \qquad \textbf{(4.1.2)}$$

NB! **Seoste nagu *Ixy* puhul on oluline muutujate *x* ja *y* järjekord.**
Kõik seosed pole sümmeetrilised.
Näiteks sellest, et üks imetleb teist, ei tulene ju, et teine imetleb esimest.

Kui kõnekeeles algab lause tavaliselt alusega ja sellele järgneb öeldis ja edasi kas määrus vms (n: *George on pikk*), siis predikaatarvutuses on vastupidi: valem algab predikaadiga ja alles seejärel kirjutatakse välja need subjektid, millele see predikaat omistatakse. Meie tähistuses (4.1.1)–(4.1.2) näiteks:

Pa – John Kennedy on pikk (subjektil *a* on omadus *P*);
Lb – George Bush on lühike (subjektil *b* on omadus *L*);
Iab – John Kennedy imetleb George Bushi (subjektid *a* ja *b* on seoses *I*);
Iba – George Bush imetleb John Kennedyt (subjektid *b* ja *a* on seoses *I*).

4.2. Nimemuutujad ja lõpetamata laused

Me kasutasime ülal *nimemuutujaid x*, *y*, *z*, ... jne, märgistamaks, millises järjekorras tuleb seostes lugeda subjektide nimesid *a*, *b*, *c*, ... jne. *Nimemuutujaid tähistatakse väikeste tähtedega* x, y, z *tähestiku lõpust.* Kuid mis need muutujad on?

Matemaatikas oleme me muutujatega tuttavad. Näiteks

$$y = 1 + 2x$$

on sirge võrrand.

[87] Ülesannete lahendamisel tuleb märkide tähendused, kui need olemas on, alati samal moel välja kirjutada.
[88] Muutujatest *x*, *y*, *z*, ... jne räägime lähemalt järgmises paragrahvis. Suur algustäht ilma muutuja või subjekti nimeta tähistab aga hoopis lausearvutuse väidet.

Aga

$$x^2 = 9$$

on astmevõrrand, millel on kaks lahendit: $x = 3$ ja $x = -3$. Matemaatikas võib muutujat x nimetada ka *tundmatu arvu nimeks.*

Loogikas muutujate nägemine on õppijaile tihti üllatav. Ometi pole siin midagi keerulist.

Muutujad ilmusid matemaatilisse loogikasse, sest selle rajajail oli eeskujuks matemaatiline analüüs, milles neid kasutatakse. Viimane leiutati, panemaks kirja Newtoni mehaanikat. Kaasaegne matemaatiline loogika tekkiski osalt sel põhjusel, et loogikud märkasid, et matemaatikas ja füüsikas kasutatakse rangeid järeldusi, mida ei saa kirja panna Aristotelese loogika keeles.

Muutujad* x, y, z, *... jne on määramata subjektide nimed.

Soovi korral võime täpsustada, öeldes, et x on tundmatu *arvu* nimi, et *kõnealuseks universumiks*[89] on arvud. Samuti võime kirjutada: „x tähistab inimesi". Sel juhul on x täpsustamata *inimese* nimi.

Lõpetamata laused

Sisuliselt on muutuja *tühik* lauses, punktiirjoon, kuhu nimi pole veel kirjutatud. Kui Px tähendab: „x on pikk," siis see on sama, mis kirjutada: „**...** on pikk." Tegemist on *lõpetamata lausega* – nagu ankeediga, mis on veel täitmata ja kuhu isiku nimi pole veel kirjutatud.

Muutujate kasutamine on otstarbekas. Sest igale poole, kuhu on kirjutatud x, tuleb lause lõpetamisel panna *üks ja sama* subjekti nimi, näiteks mehe nimi a. Igale poole, kuhu on kirjutatud y, tuleb samuti panna *üks ja sama* subjekti nimi – mis ei pruugi aga olla a, vaid võib olla näiteks selle mehe a naise nimi d.

Muutujate* x *ja* y *abil räägime me kahest täpsustamata subjektist, mis ei pruugi kokku langeda.

4.3. Kvantorid

Ühte viisi, kuidas lõpetamata lausest täislauset teha, me juba tunneme. Selleks tuleb kõik muutujad lauses asendada subjektide pärisnimedega. Näiteks lõpetamata lausest (vt tähistust (4.1.2))

$$Px \ \& \ {\sim}Lx \ \& \ Ixy \ \& \ Ixx \qquad \textbf{(4.3.1)}$$

– „x on pikk ja x pole lühike ja x imetleb y-t ja iseennast," – saame pärisnimede a ning b (vt tähistust (4.1.1)) abil moodustada järgmise lõpetatud lause:

$$Pb \ \& \ {\sim}Lb \ \& \ Iba \ \& \ Ibb \qquad \textbf{(4.3.2)}$$

– *George Bush on pikk ja ta pole lühike, ning ta imetleb John Kennedyt ja iseennast.*

Ent on veel üks tähtis viis, kuidas lauseid lõpetada saab. Nimelt võime me kasutada *kvantoreid.*

89 Ingl k: *the universe of discourse.*

Kvantorid

KVANTOR on hulga- või kogusemääraja.

Kvantum on hulk, määr või kogus. Ladina keeli tähendab *quantum*: „kui palju“.[90]

Kõnekeeles on väga palju kvantoreid, näiteks: *kõik*, *enamus*, *enamik*, *75%*, *absoluutne enamus*, *pooled*, *palju*, *vähe*, *alati*, *mõnikord*, jne.

Üldisuse kvantor ja olemasolu kvantor

Aristotelese loogikas kasutatud väljendid *kõik* ja *mõned* (tähenduses: *vähemalt üks*) on samuti kvantorid. Just neist kahest klassikalisest kvantorist alustabki predikaatarvutus. Ülejäänud kvantorid püütakse seejärel defineerida nende kahe kaudu.

Väljend „kõik“ tähistab UNIVERSAALSUSE- ehk ÜLDISUSE KVANTORIT.
Väljend „mõned“ tähistab EKSISTENTSI- ehk OLEMASOLU KVANTORIT.

Üldisuse kvantorile viitavad veel näiteks järgmised väljendid: *mistahes*, *suvaline*, *alati*, *kõikjal*, *igaüks*, *eranditult*, *mitte keegi*, *mitte ükski*, *mitte midagi*, *mitte kunagi*, *mitte kusagil* (viimasel viiel juhul üldeitavates lausetes).

Olemasolu kvantorile viitavad näiteks järgmised väljendid: *leidub*, *on olemas*, *vähemalt üks*, *keegi*, *miski*, *midagi*, *kunagi*, *kusagil.*

Kvantorite tähistused

Matemaatilises loogikas kasutatakse kvantorite tähistamiseks sümboleid:

ÜLDISUSE KVANTORIT tähistab tagurpidi suur A täht: $\forall$
OLEMASOLU KVANTORIT tähistab tagurpidi suur E täht[91]: $\exists$

Arvutist leiab need märgid „spetsiaalsete sümbolite“ alt alajaotusest „sümbolid“.

Kvantori märgi taha tuleb alati kirjutada muutuja,
millele see kvantor rakendub.

Kui üldisuse kvantor rakendub muutujale *x*, siis tulebki kirjutada:

$\forall x$**,** mida loetakse: „Iga *x* korral ...“

Kui olemasolu kvantor rakendub muutujale *x*, siis tulebki kirjutada:

$\exists x$, mida loetakse: „Leidub selline *x*, mille korral ...“

Seejärel tuleb kirja panna, mis siis iga või mõne *x* puhul aset leiab. Valem

$$\forall x\ (...)$$

ütleb, et iga *x* puhul on tõsi see, mis sulgudes öeldud. Valem

$$\exists x\ (...)$$

aga ütleb, et on olemas vähemalt üks selline *x*, mille puhul on tõsi see, mis sulgudes öeldud.

Näiteks valem

90 Samast sõnatüvest on tuletatud ka sõnad *kvantitatiivne* ja *kvant*füüsika.

91 Üldisuse kvantor on inglise keeli ***U****niversal quantifier*, olemasolu kvantor aga ***E****xistential quantifier.* Nende fraaside esitähtedega ***U*** ja ***E*** tähistatakse kvantoreid alternatiivses tähistusviisis.

$$\forall x\ Bx \tag{4.3.3}$$

ütleb, et kõikidel x-del on omadus B, aga valem

$$\exists x\ Bx \tag{4.3.4}$$

ütleb, et vähemalt ühel x-l on omadus B. Valem

$$\forall x\ (Rx \rightarrow Bx) \tag{4.3.5}$$

ütleb, et iga x korral, kui x-l on omadus R, siis on tal ka omadus B (kõik R-d on B-d). Valem

$$\exists x\ (Rx\ \&\ Bx) \tag{4.3.6}$$

aga ütleb, et leidub x, millel on nii omadus R kui ka omadus B (mõni R on B).

Kui me tähistame:

Rx – x on vares;
Bx – x on must, **(4.3.7)**

siis valem (4.3.5) ülal ütleb: „Iga x korral: kui x on vares, siis x on must," mis ilma x-deta tähendab kõnekeeli: *Kõik varesed on mustad.*

Valem (4.3.6) ülal aga ütleb tähistuses (4.3.7): „Leidub selline x, mis on vares ja mis on must," mis ilma x-deta tähendab kõnekeeli: *Mõned varesed on mustad.*

Sidumata muutujad ja seotud muutujad

Naaseme nüüd küsimuse juurde, kuidas lõpetamata lauseid kvantorite abil lõpetada.

Sidumata muutuja on muutuja, mida tema ees vasakul kvantoreis ei esine. *Seotud muutuja* on muutuja, mis esineb tema ees vasakul olevas kvantoris.[92] Näiteks avaldises

$$Rx \tag{4.3.8}$$

on x sidumata muutuja. Avaldises

$$\exists x\ Ixy \tag{4.3.9}$$

on x seotud muutuja, y aga sidumata muutuja. Avaldises

$$\exists x\ \exists y\ Ixy \tag{4.3.10}$$

on mõlemad muutujad x ja y seotud muutujad.

Avaldist (4.3.10) tuleb lugeda nii: „Leidub selline x ja leidub selline y, et x ja y on seoses I." Kui Ixy tähendas (vt tähistust (4.1.2)): „x imetleb y-t," siis lause (4.3.10) ütleb: „Leidub selline x ja leidub selline y, et x imetleb y-t." Kui oli mainitud, et x ja y tähistavad inimesi, siis saame kõnekeeli lause: *Keegi imetleb kedagi.*[93]

---

92 Iga muutuja tohib esineda vaid ühes kvantoris.

93 Veel üks võimalus x ja y muutumispiirkonna andmiseks oleks kasutada mitte lauset „x ja y tähistavad inimesi," vaid predikaati *Hx* – x *on inimene*, ja nn *tõkestatud kvantoreid.* Lause (4.3.10) saaks siis kuju $(\exists x\ Hx)\ (\exists y Hy)\ Ixy$.

Ainult lause, milles kõik muutujad on seotud, on lõpetatud lause.
Lause, milles esineb vabu, sidumata muutujaid, on lõpetamata lause.

Kolmest näitest (4.3.8)–(4.3.10) ülal on vaid lause (4.3.10) täislause. Lõpetatud lause näitena toome veel järgmise avaldise:

$$\exists x\ Ixa, \qquad \textbf{(4.3.11)}$$

mis võib tähendada näiteks (vt tähistusi (4.1.1)–(4.1.2)): *Keegi imetleb John Kennedyt.*

Kokkuvõttes:

Lõpetamata lause lõpetamiseks tuleb iga muutujaga teha ühte kahest:
asendada ta subjektinimega
või siduda ta kvantoriga.

4.4. Loogilise ruudu esitamine predikaatarvutuses

Nüüd saame predikaatarvutuse sümbolkeeles üles kirjutada järeldusseosed traditsioonilise loogika nn „loogilisest ruudust“. Vaatame näiteks järgmisi väiteid:

A – Kõik varesed on mustad; *E – Ükski vares pole must;*
I – Mõni vares on must; *O – Mõni vares pole must.* **(4.4.1)**

ESIMENE VÕIMALUS. Tähistagu *x*, *y*, ... vareseid. Tähistame veel: *Mx – x on must.* Siis „loogiline ruut“ näeb välja nii (vt *Joonis 5* allpool):

A: $\forall$**x Mx** **E:** $\forall$**x ~Mx**
I: $\exists$**x Mx** **O:** $\exists$**x ~Mx**

JOONIS 5
Loogiline ruut predikaatarvutuses

Järeldused $A \Rightarrow I$ (*A*-st järeldub *I*) ja $E \Rightarrow O$ (*E*-st järeldub *O*) saavad siin järgmise kuju:

$$\frac{\forall x\ Mx}{\exists x\ Mx} \qquad \frac{\forall x\ {\sim}Mx}{\exists x\ {\sim}Mx} \qquad \textbf{(4.4.2)}$$

Seosed loogilise ruudu diagonaalidel saavad aga järgmise kuju:

$$\sim\forall x\ Mx = \exists x\ {\sim}Mx \qquad \textbf{(4.4.3)}$$
$$\sim\exists x\ Mx = \forall x\ {\sim}Mx \qquad \textbf{(4.4.4)}$$

Viimast kahte reeglit (4.4.3)–(4.4.4) nimetatakse *duaalsuse seadusteks.* Need reeglid ütlevad, et *eituse märgi ~ viimisel kvantori märgi taha vahetuvad kvantorid* $\forall$ *ja* $\exists$.

Valemis (4.4.3) ütleb vasak pool: *Pole tõsi, et kõik varesed on mustad.* Parem pool ütleb: *Leidub vähemalt üks vares, kes pole must.* Valemis (4.4.4) ütleb vasak pool: *Pole tõsi, et leidub vähemalt üks vares, kes on must.* Parem pool ütleb: *Kõik varesed on mitte-mustad.*

TEINE VÕIMALUS. Tähistame: *Vx – x on vares*; *Mx – x on must.* Siis saame:

$$A:\ \forall x\,(Vx \rightarrow Mx) \qquad E:\ \forall x\,(Vx \rightarrow \sim Mx) \qquad \textbf{(4.4.5)}$$

I ja *O* kirjapanemisel satume aga segadusse. Nimelt valem $\exists x\,(Vx \rightarrow Mx)$ tähendab: *Leidub miski, mis on must, KUI ta on vares.* Valem

$$I:\ \exists x\,(Vx\ \&\ Mx) \qquad \textbf{(4.4.6)}$$

väidab aga: *Vähemalt üks vares on must.* Selline väide aga ei järeldu eeldusest *A* (vt (4.4.5)). Et järeldada tulemit (4.4.6), peame lisaks eeldama – nagu eeldas Aristoteles –, et vähemalt üks vares on olemas: $\exists x\ Vx$. See tõik on XX sajandi loogikuile veidi arusaamatusi loonud.

Võime siiski meelde jätta, et üldisuse kvantoriga $\forall$ lausetes on sulgudes tavaliselt implikatsioon $\rightarrow$ (vt (4.4.5)) ja olemasolukvantoriga $\exists$ lausetes tavaliselt konjunktsioon $\&$ (vt (4.4.6)).

4.5. Aristotelese süllogismide esitamine predikaatarvutuses

Ka Aristotelese süllogisme saab esitada ühekohaliste predikaatidega.[94] Vaatleme kolme süllogismi:

1. *Kõik inimesed on surelikud. Sokrates on inimene. Seega Sokrates on surelik.*
2. *Kõik inimesed on surelikud. Mõned olendid on inimesed. Seega mõned olendid on surelikud.*
3. *Kõik inimesed on surelikud. Ükski jumal pole surelik. Seega ükski jumal pole inimene.*

Tähistame:

Ix – x on inimene;
Sx – x on surelik;
a – Sokrates;
Ox – x on olend;
Jx – x on jumal.

Siis saame järgmised predikaatarvutuse kehtivad järeldused:

$$1.\quad \frac{\begin{array}{l}\forall x\,(Ix \rightarrow Sx)\\ Ia\end{array}}{Sa} \qquad \textbf{(4.5.1)}$$

$$2.\quad \frac{\begin{array}{l}\forall x\,(Ix \rightarrow Sx)\\ \exists x\,(Ox\ \&\ Ix)\end{array}}{\exists x\,(Ox\ \&\ Sx)} \qquad \textbf{(4.5.2)}$$

$$3.\quad \frac{\begin{array}{l}\forall x\,(Ix \rightarrow Sx)\\ \forall x\,(Jx \rightarrow \sim Sx)\end{array}}{\forall x\,(Jx \rightarrow \sim Ix)} \qquad \textbf{(4.5.3)}$$

Aga ühekohaliste predikaatidega saab kirja panna ka selliseid kehtivaid järeldusi, mis pole Aristotelese süllogismid. Lisaks sellele on meie käsutuses ka rohkemakohalised predikaadid.

---

94 Siingi tuleb aga mõnikord meelde tuletada, et Aristoteles eeldas vaadeldava liigi esindaja olemasolu – eeldas, et see liik pole tühi hulk.

4.6. Seosed ja predikaatarvutus

Seoste esitamine predikaatarvutuses

Tähistagu muutujad x, y ja z inimesi. Tähistame veel: *Axy – x armastab y-t.*

Lausearvutuse tehteid kasutamata saab üldisuse- ja olemasolu kvantoritega seosest *Axy* moodustada täpselt *8* erinevat lauset:

1. $\exists x \exists y\, Axy$ – *Leidub selline* x *ja leidub selline* y*, et see* x *armastab seda* y*-t.*
2. $\forall x \forall y\, Axy$ – *Iga* x *ja iga* y *korral* x *armastab* y*-t.*
3. $\exists x \forall y\, Axy$ – *Leidub selline* x*, et iga* y *korral see* x *armastab seda* y*-t.*
4. $\exists x \forall y\, Ayx$ – *Leidub selline* x*, et iga* y *korral* y *armastab seda* x*-i.*
5. $\forall x \exists y\, Axy$ – *Iga* x *korral leidub selline* y*, keda see* x *armastab.*
6. $\forall x \exists y\, Ayx$ – *Iga* x *korral leidub selline* y*, kes seda* x*-i armastab.*
7. $\exists x\, Axx$ – *Leidub selline* x*, kes armastab iseennast.*
8. $\forall x\, Axx$ – *Iga* x *puhul see* x *armastab iseennast.* **(4.6.1)**

Ülal oli väga oluline jälgida muutujate järjekorda. Kõnekeeelsete lausetena saame kirjutada:

1. *Keegi armastab kedagi.*
2. *Kõik armastavad kõiki.*
3. *Keegi armastab kõiki.*
4. *On keegi, keda kõik armastavad.*
5. *Igaüks armastab kedagi.*
6. *Igaüht armastab keegi.*
7. *Keegi armastab iseennast.*
8. *Igaüks armastab iseennast.* **(4.6.2)**

Kui kasutada ka lausearvutuse tehteid, siis võime kirja panna keerulisemaid lauseid. Näiteks

$$\exists x \exists y\, (Axy\ \&\ \sim Ayx) \qquad \textbf{(4.6.3)}$$

teatab: *Keegi armastab kedagi, kes teda vastu ei armasta.*

Kui tähistada: *a – Mari***,** siis lause

$$\exists x\, Axa \rightarrow \forall y\, Aay \qquad \textbf{(4.6.4)}$$

teatab: *Kui keegi Marit armastab, siis Mari armastab kõiki.*

Kui $x \neq y$ *tähendab, et x ja y pole üks ja sama isik*, siis lause

$$\exists x \forall y\, [(x \neq y) \rightarrow \sim Axy] \qquad \textbf{(4.6.5)}$$

ütleb: *On keegi, kes ei armasta kedagi, kes pole tema ise.*

Seoste klassifikatsioon[95]

Seost *Axy* nimetatakse *sümmeetriliseks*, kui ta on alati pööratav:

$$\forall x\, \forall y\, (Axy \rightarrow Ayx) \qquad \textbf{(4.6.6)}$$

SÜMMEETRILINE SEOS

Seost *Axy* nimetatakse *antisümmeetriliseks*, kui ta on alati mittepööratav:

$$\forall x\, \forall y\, (Axy \rightarrow {\sim}Ayx) \qquad \textbf{(4.6.7)}$$

ANTISÜMMEETRILINE SEOS

Aritmeetikas on võrdumise seos sümmeetriline. Kui $2 + 3 = 5$, siis $5 = 2 + 3$, ja nii ka kõikide teiste arvude puhul. Range võrratus on aga antisümmeetriline: kui $3 > 2$, siis ei vasta tõele, et $2 > 3$, ja nii ka kõikide teiste arvude puhul.

Paljud seosed aga pole ei sümmeetrilised ega ka antisümmeetrilised. Mõnede elementide puhul on seos siis mõlemapidine, mõnede elementide puhul aga mitte:

$$\exists x \exists y\, (Axy \;\&\; Ayx) \;\&\; \exists x' \exists y'\, (Ax'y' \;\&\; {\sim}Ay'x') \qquad \textbf{(4.6.8)}$$

Näiteks armastuse seos on selline: mõni armastus leiab vastuarmastuse, aga mõni ei leia.

Järeldused seostega

Seoseid õpiti analüüsima juba traditsioonilise loogika arengu lõppstaadiumis, täiendina Aristotelese süllogismidele. Seosed assimileeriti aga ennekõike kaasaegsesse matemaatilisse loogikasse.

Ka seostega saab kirja panna järeldusi, kuid mitte selliseid, mida tundis Aristotelese süllogistika. Näiteks *kehtib järgmine järeldus:*

$$\boxed{\mathbf{\exists x \forall y\; Axy \Rightarrow \forall y \exists x\; Axy.}} \qquad \textbf{(4.6.9)}$$

Tõepoolest: kui keegi armastab kõiki, siis on see ju vältimatu tõde, et igaüht armastab keegi.

Vastupidises suunas aga järeldada ei saa. Sellest, et igaüht armastab keegi, ei järeldu ju, et on keegi, kes kõiki armastab. Kui keegi on kõigi inimeste isa, siis on igal inimesel isa. Kuid sellest, et igal inimesel on isa, ei järeldu rangelt, et keegi (Adam; Jumal) on kõigi inimeste isa.

PA reeglite tõestamine

Predikaatarvutuse reeglite kehtivust ei saa tõestada tõesustabelitega. Üldisuskvantori tõttu tuleks tõesustabelisse siin ju lõpmata palju ridasid. Mõned *PA* reeglid on meile intuitiivselt mõistetavad, aga süllogisme oskame tõestada Euleri diagrammidega. Kuidas üldjuhul *PA* reegleid tõestatakse, me käesolevas õpikus ei käsitle. Märgime, et endiselt ei saa üksikute näidete esitamise abil tõestada reegli kehtivust, küll aga saab ka *PA*-s üksikute kontranäidete esitamisega tõestada, et ekslikult esitatud „reegel“ tegelikult rangelt ei kehti. Konkreetse näite esitamisega argumenteerisimegi ülal, et järeldus (4.6.9) vastassuunas ei kehti.

[95] Sama klassifikatsiooni võib leida abstraktsest algebrast.

4.7. Mõistete defineerimine

Traditsioonilises loogikas osutatakse suurt tähelepanu mõistetele ja mõistete defineerimisele – nende sisu määratlemisele.[96]

Mõistele vastab predikaatarvutuses *ühekohaline predikaat.* Näiteks „inimene" on mõiste. Predikaatarvutus ehitatakse üles lausearvutusele. Nende arvutuste keerukate tehniliste detailide esitamine võtab palju ruumi. Võimalik, et see ongi üks põhjus, miks matemaatilise loogika raamatutes mõistete defineerimiseni mõnikord ei jõutagi või siis pööratakse sellele küsimusele vaid põgusat tähelepanu – nagu meiegi siin teeme.[97]

Defineerimine predikaatarvutuses
Vaatleme järgmist geomeetrilist definitsiooni:

Ruuduks nimetatakse võrdkülgset ristkülikut. **(4.7.1)**

Pikemalt näeb see definitsioon välja nii:

Geomeetrilist kujundit nimetatakse ruuduks parajasti siis,
kui ta on võrdkülgne ja kui ta on ristkülik. **(4.7.2)**

Tähistagu muutujad x, y ja z geomeetrilisi tasapinnalisi kujundeid. Tähistame:

Ax – x on võrdkülgne;
Bx – x on ristkülik;
Cx – x on ruut. **(4.7.3)**

Definitsiooni (4.7.2) saame siis kirja panna ekvivalentsi tehte ↔ abil:

$$Def: \quad \forall x\ [Cx \leftrightarrow (Ax\ \&\ Bx)] \qquad \textbf{(4.7.4)}$$

Ekvivalentsi tehte märgist ↔ vasakul pool on siin defineeritav predikaat, paremal pool aga defineerivad predikaadid. Kui me juba teame, mida tähendavad märgid A ja B, siis saame valemi (4.7.4) abil teada, mida tähendab märk C.

Defineerimise reeglid
Traditsioonilises loogikas esitatakse rida nõudeid, mida korrektne definitsioon peaks rahuldama. Nimetame neist mõned: 1) defineerivad mõisted peavad olema *täpse tähendusega*; 2) definitsioon ei tohi olla *liiga avar* ega *liiga kitsas*; 3) tuleb vältida *negatiivseid termineid*; 4) defineeritav mõiste ei tohi sisalduda defineerivais mõisteis – st definitsioon ei tohi olla *eneseleviitav.*

Näiteks definitsioonis *Ruuduks nimetatakse ilusat ristkülikut*, on defineeriv mõiste „ilus" matemaatikule liiga ebamäärane. Definitsioon *Ruuduks nimetatakse geomeetrilist kujundit*, on liiga avar, sest kõiki geomeetrilisi kujundeid ei soovi me nimetada ruutudeks. Definitsioon *Ruuduks nimetatakse rohelist võrdkülgset ristkülikut*, on liiga kitsas, sest ka näiteks sinist ruutu soovime nimetada ruuduks. Pipi Pikksuka esitatud definitsioon *Kõik asjad, mis pole selles plekkpurgis*, sisaldab negatiivset terminit „pole". Sedasi saame veidralt käituvaid mõisteid. Negatiivse terminiga definitsioon võib ka viia vastuolulisele mõistele – näiteks definitsioon *Ruuduks nimetatakse ristkülikut, mis pole ruut.* Vastava subjekti olemasolu rikuks vastuoluseadust.

---

[96] Vt nt Meos (2003: 15–27) peatükki „Mõiste," Vuks (1999: 31–75) peatükki „5. Mõiste kui mõtlemisvorm," või Grauberg (1996: 28–37) paragrahve mõisteist ja mõistete defineerimisest.

[97] Matemaatilise loogika õpikutes on defineerimisest juttu n: (Tamme jt 1997: 73–4); (Kelley 1990: 32–56); ja (Зегет 1985: 212–54). Spetsiifilise Lorentz 2000 mõisteregistrist märksõnu „mõiste" ja „defineerimine" ei leia.

Eneseleviitavad definitsioonid
Eneseleviitavas definitsioonis sisaldub defineeritav mõiste defineerivate mõistete seas või siis on mõne defineeriva mõiste tähendus avatud defineeritava mõiste kaudu.

Eneseleviitav definitsioon võib osutuda liiga avaraks või koguni *ringdefinitsiooniks*, mis defineeritavat mõistet ei piiritle. Näiteks määratlus *Ruut on ... noh, lihtsalt üks ruut*, ei anna mulle mingitki vihjet, mis on ruut, kui ma veel ei tea sõna „ruut“ tähendust. Analoogiliselt võrrand $x = x$ lahendub võrduseks $0 = 0$, mis on küll alati õige, ei ütle aga midagi muutuja x väärtuse kohta.

Eneseleviitav definitsioon võib ka osutuda *vastuoluliseks.* Analoogiliselt võrrand $x = x + 1$ ei oma ühtki lahendit, sest x iga väärtuse korral viib ta absurdile $0 = 1$.

Mõned kriitilised märkused
Ent kõik eneseleviitavad definitsioonid ja -laused ei vii vastuolule, samas kui mõned paradoksid tekivad ka eneseleviitamiseta (vt nt (Cryan jt 2003: 68)). Ka ei saaks me mitmeid vajalikke asju määratleda, kui me ei tohiks kasutada eneseleviitavaid definitsioone. Matemaatikas ei tohiks me siis kasutada võrrandeid. Näiteks võrrand $x = x^2$ on muutuja x eneseleviitav definitsioon, ent ta on lahenduv: $x = 0$ ja $x = 1$. On hea, kui eneseleviitavat definitsiooni õnnestub vältida, ent teda ei saa keelata. Pigem on küsimus selles, milliseid täiendavaid tingimusi peab eneseleviitav definitsioon rahuldama, olemaks lahenduv.

Juba antiikajal oli tuntud nn *Kuhja paradoks.* Mitu liivatera peab koos olema, et moodustuks kuhi? Mõiste „kuhi“ on ebamäärane, ometi peame seda mõistet kasutama. – Selle paradoksi ajel töötati välja nn *hägusloogika* (ing k: *fuzzy logic*), mis opereerib ebatäpsete mõistetega ja on kaasaegse loogika üks mitteklassikaline haru (vt nt (Cryan jt 2003: 84–91) või (Tamme jt 1997: 266–72)).

Wittgenstein (1889 – 1951) leidis 1953. a ilmunud teoses *Filosoofilised uurimused* (Wittgenstein 2005), et mõisteid ei saagi täpselt defineerida ning et sellest üritusest tuleb loobuda. Filosoofide seas sai see vaade populaarseks. Ent kui Wittgenstein ja tema järgijad mingeid argumente üldse esitasid, siis olid need induktiivsed ja seega mitteotsustavad (vt nt (Eintalu 2001: 16–22)). Tundub, et võrreldes traditsioonilise loogikaga langesid wittgensteiniaanid teise äärmusse. Tuleks ikkagi püüda tähtsaid termineid võimaluse korral piisavalt täpselt määratleda.

4.8. Loogika paradokse

Valetaja paradoks
Juba antiikajal tunti nn *Valetaja paradoksi.* Selle lihtsaim vorm on järgmine lause:

Käesolev lause on väär. **(4.8.1)**

Kui lause (4.8.1) on tõene, siis on ta väär. Kui ta aga on väär, siis on ta tõene.

Lause (4.8.1) on *eneseleviitav* – ta räägib iseendast. Teatavas mõttes on selle lause mõte defineeritud, viidates sellele mõttele endale.

Valetaja paradoksi püüdis lahendada Tarski (1902 – 83), eristades *objektkeele* lauseid ja *metakeele* lauseid (vt nt (Cryan jt 2003: 71–2)).[98] Objektkeele laused räägivad maailma objektidest. Näitena objektkeele lause: *Lumi on valge.* Metakeele laused räägivad aga objektkeele lausetest. Näitena metakeele lause: *Lause „Lumi on valge“ on tõene.* – Paraku (4.8.1) staatus jääb ebamääraseks. Katsed sääraseid lauseid ära keelata viisid aga ka mõnede mõistlike lausete vältimisele.

[98] Eristus objekt- ja metakeele lausete vahel haakub meie varasema eristusega fakti- ja loogikaväidete vahel.

Valetajat on püüdnud lahendada ka Soome filosoof von Wright (vt Wright 2001d).

Ma ise arvan, et lause (4.8.1) pole ei tõene ega väär ning ta polegi *2*-valentse loogika objekt. Tema tõeväärtus on näiteks „mittemääratud“. Või siis polegi tegemist väitega ja tal pole tõeväärtust.

Lauseid nagu (4.8.1) võiks lihtsalt vältida. Tõelise skandaaliga on tegemist aga siis, kui vastuolulist definitsiooni vältida ei saa või ei osata. Sel juhul on tegemist ehtsa *loogika paradoksiga.*

Cantori paradoks
Cantor (1845 – 1918) rajas aastatel 1874 – 85 kaasaegse *hulgateooria*, mida hiljem hakati pidama matemaatika vundamendiks. 1891. a aga tõestas ta nn *Cantori teoreemi.* Sellest järeldas ta nn *Cantori paradoksi.* Nimelt: *kõikide hulkade hulk* on iseendast „võimsam“. Teatavas mõttes sisaldab ta „rohkem“ elemente kui ta sisaldab, mis on võimatu. See oli skandaal matemaatika alustes.

Kõikide hulkade hulk on veider veel ka selle poolest, et ta sisaldab elemendina iseennast – erinevalt näiteks hulgast *inimkond.* Pole ju inimest, kes oleks kogu inimkond.

Frege (1848 – 1925) rääkis *mõistetest.* Mõistele vastab talle alluvate subjektide hulk. Mõistele *inimene* vastab inimeste hulk. Frege teooria sarnanebki hulgateooriale (Wright 1982: 63–80).

Russelli paradoks
Kui Frege oli oma elutöö lõpetanud, vastas Russell (1872 – 1970) sellele 1901. a nn *Russelli paradoksiga.* – Püüame paradoksaalseid hulki vältida. Nimetame *pärishulgaks* hulka, mis ei sisalda elemendina iseennast. Moodustamegi *kõikide pärishulkade hulga.* – Paraku, kui see moodustis on pärishulk, siis ta pole seda ja kui ta pole seda, siis ta on seda. Skandaal loogika alustes säilis ja ka Russellil ei õnnestunud oma paradoksi lahendada (vt nt (Cryan jt 2003: 23–4 & 66–70)).

4.9. Mis on kõrgemat järku predikaatarvutus

Teist järku predikaatarvutus
Teist järku predikaatarvutuses (vt nt (Tamme jt 1997: 221–31)) rakendatakse kvantoreid mitte ainult subjektidele, vaid ka predikaatidele. Kui esimest järku predikaatarvutuses, mida seni uurisime, esinevad vaid subjekti nimemuutujad x, y ja z, siis teist järku predikaatarvutuses kasutatakse ka predikaadi nimemuutujaid, mida tähistatakse suurte tähtedega tähestiku lõpust: X, Y ja Z.

Näiteks lause

$$\exists X\, Xa, \qquad \textbf{(4.9.1)}$$

teatab, et subjektil a on *mingi* omadus.

Leibnizi seadus
Teist järku predikaatarvutuse keeles saab kirja panna näiteks Leibnizi (1646 – 1716) *identsusseaduse* (vt nt (Cryan jt 2003: 10–11)):

> *Kaks subjekti* a *ja* b *on identsed parajasti siis,*
> *kui kõike, mida saab öelda neist ühe kohta,*
> *saab öelda ka teise kohta ja vastupidi.* **(4.9.2)**

Identsuse (4.9.2) tähistamiseks tõi Leibniz loogikasse võrdusmärgi = :

$$a = b \qquad \textbf{(4.9.3)}$$

Predikaatarvutuse keeles saame Leibnizi definitsiooni (4.9.2) nüüd kirja panna järgnevalt:

$$\textit{Def:} \quad (a = b) \leftrightarrow \forall X\, (Xa \leftrightarrow Xb) \qquad \textbf{(4.9.4)}$$

IDENTSUS

Leibnizi definitsioonis tuleb aga piirata *X* muutumispiirkonda. Vastasel korral on tavatähenduses „üks ja sama asi“ kahel erineval ajahetkel siiski kaks erinevat asja – isegi kui tema „omadustest“ on muutunud vaid ajahetk.

Teist järku predikaatarvutuse raskused

Alles teist järku predikaatarvutuses saab kirja panna keerulisemaid lauseid, mis meid huvitavaid. Samas kubiseb see loogikaharu probleemidest ja paradoksidest. Mõnda neist me juba tunneme. Ühekohalisele predikaadile vastab ju subjektide hulk, millele see predikaat kuulub. Kui me kasutame predikaatmuutujat *X*, siis sisuliselt räägime me predikaatide hulgast. Seega on meil juba tegu hulkade hulkadega ning Cantori- ja Russelli paradoksid pole enam mägede taga.

Ülesandeid

1. Kirjutage predikaatarvutuse sümboleis:
   - 1.1. Kõikidel elevantidel on lont ja nad ei oska lennata.
   - 1.2. Kõikidel elevantidel on lont ja ükski elevant ei oska lennata.
   - 1.3. Mõni elevant ei oska lennata.
   - 1.4. See pole tõsi, et kõik elevandid oskavad lennata.
   - 1.5. See pole tõsi, et ükski elevant ei oska lennata.
   - 1.6. Kui mõni elevant oskab lennata, siis pole tal lonti.
   - 1.7. Vähemalt üks vares pole must (vt *Joonis 5*).
2. Vaadake eelmises ülesandes väiteid 1.1–1.6. Millisest väitest siin järeldub milline väide?
3. Kirjutage predikaatarvutuse sümboleis:
   - 3.1. Maailm on alati olemas.
   - 3.2. Kusagil on tulekahi.
4. Millised järgmistest järeldustest kehtivad?
   - 4.1. $\exists x\, Px \Rightarrow \forall x\, Px$
   - 4.2. $[\forall x\, (Px \rightarrow Rx)\ \&\ \sim Ra] \Rightarrow \sim Pa$
5. Kirjutage predikaatarvutuse sümboleis:
   - 5.1. Iga sportlane kaotab kellelegi.
   - 5.2. Ükski sportlane ei kaota iseendale.
   - 5.3. Martin ei kaota kellelegi.
   - 5.4. See pole tõsi, et Martin kaotab kõigile.
6. Millised järgmistest järeldustest kehtivad?
   - 6.1. $\forall x\, \exists y\, Axy \Rightarrow \forall y\, \exists x\, Axy$
   - 6.2. $\forall x\, \exists y\, Ayx \Rightarrow \forall y\, \exists x\, Ayx$
   - 6.3. $\forall x\, \forall y\, Axy \Rightarrow \forall y\, \exists x\, Axy$

7. Defineerige predikaatarvutuse sümboleis järgmised mõisted:
   7.1. eestlanna;
   7.2. väliseestlane;
   7.3. paaritu arv;
   7.4. kõrgeim mäetipp.
8. Mis on viga järgmistel definitsioonidel?
   8.1. Ruutriangliks nimetatakse nelja küljega kolmnurka.
   8.2. Patrioot on patriootiline kodanik.

Kirjandust

Cryan jt (2003) *Juhatus loogikasse (*Tln: KOGE), lk 10–11; 16–7; 23–7; 49–57 & 66–73.

Eintalu (2006) *Loogika näidisülesanded ja harjutused* (Tln: Sisekaitseakadeemia), lk 62–75.

Forbes (1994) „Monadic Predicate Logic." In his *Modern Logic: A text in elementary symbolic logic* (NY & Oxford: Oxford UP), pp 147–216.

Grauberg (1996) „Mis on definitsioon ning kuidas defineerida?" Tema raamatus *Loogika, keel ja mõtlemine* (Tln: Tallinna Bakalaureuse Erakool), lk 34–7.

Guttenplan (1986) „Translating into Predicate." In his *The Languages of Logic: An introduction* (Oxford & NY: Blackwell), pp 220–46.

Kelley (1990) *The Art of Reasoning with Symbolic Logic.* London & NY: W. W. Norton & Company. – Siit peatükid: „3. Definitions (pp 32–56) & „13. Predicate Logic" (pp 313–49).

Meos (2003a) *Loogika, argumentatsioon, mõtlemiskultuur* (Tln: Koolibri), lk 20–24 & 70–88.

Tamme jt. (1997) *Loogika. Mõtlemisest tõestamiseni.* Tartu: TÜ Kirjastus. – Siit peatükk: „4. Predikaatarvutus" (lk 94–129).

Tarski (1965) *Introduction to Logic and to the Methodology of Deductive Sciences.* NY: Oxford UP.

Vuks (1999) *Traditsiooniline formaalne loogika* (Tartu: Sihtasutus Iuridicum), lk 50–56 & 93–7.

Wright (1982) „Frege ja Russell." Tema raamatus *Logiikka, filosofia ja kieli* (Keuruu: Kustannusosakeyhtio Otavan painolaitokset), lk 63–80.

Wright (2001d) „Valetaja paradoks." Tema raamatus *Filosoofia, loogika, normid* (Tln: Vagabund), lk 267–81.

Зегет (1985) *Элементарная логика* (М: Высшая школа), сс 116–254.

5. MITTEKLASSIKALISI LOOGIKAID

Kaasaegse loogika mõned mitteklassikalised harud seavad kahtluse alla Aristotelese 3 põhiseadust. Näiteks *mitmevalentne loogika* ei tunnista välistatud kolmanda seadust, *hägusloogika* aga rikub samasuse seadust. Mõned mitteklassikalised loogikad aga käsitlevad teemasid, mida me seni pole uurinud. Näiteks *modaalloogika* käsitleb sarnaseid modaalsuseid nagu *paratamatu.*

5.1. Mis on modaalloogika

Modaalsuseid nagu *paratamatu* analüüsis juba Aristoteles. Kaasaegse modaalloogika rajas C. I. Lewis (1883 – 1964) alates 1912. a.[99] Tema teos *Uurimus sümbolloogikast* ilmus 1918. a.

Vaatleme selliseid modaalsuseid nagu *paratamatu*; *võimalik*; ja *võimatu.* Võtame nende modaalsuste tähistamiseks kasutusele järgmised operaatorite sümbolid[100]:

N *– paratamatu;*
P *– võimalik;*
I *– võimatu.* **(5.1.1)**

Olgu A mingi väide. Siis näiteks avaldis

$$\boldsymbol{N}A \qquad \textbf{(5.1.2)}$$

teatab, et A on paratamatult tõene, näiteks, et A-s kirjeldatud sündmus paratamatult toimub.

Me võime eristada *loogilist* paratamatust ja *füüsikalist* paratamatust. Mis on loogiliselt võimalik, ei pruugi olla füüsikaliselt võimalik. Ent mis on füüsikaliselt võimalik, see on ka loogiliselt võimalik. Kui tahame mõlemast paratamatusest korraga rääkida, peaksime kasutama kahte operaatori märki: $\boldsymbol{N_1}$ ja $\boldsymbol{N_2}$. Siin piirdume aga viidetega tekstis.

Järgmised valemid on intuitiivselt mõistetavad:

$$A \to \boldsymbol{P}A \qquad \textbf{(5.1.3)}$$
$$\boldsymbol{N}A \to A \qquad \textbf{(5.1.4)}$$
$$\sim\boldsymbol{P}A \leftrightarrow \boldsymbol{I}A \qquad \textbf{(5.1.5)}$$
$$\sim\boldsymbol{P}\sim A \leftrightarrow \boldsymbol{N}A \qquad \textbf{(5.1.6)}$$
$$\textit{Def:} \quad (A \Rightarrow B) \leftrightarrow \boldsymbol{N}(A \to B) \qquad \textbf{(5.1.7)}$$

Aksioom (5.1.3) ütleb, et kui väide A on tõene, siis on tema tõesus võimalik. Näiteks: kui mingi sündmus toimus, siis oli selle sündmuse toimumine võimalik. Mis on tegelik, on ka võimalik (ent mitte vastupidi). (5.1.4) ütleb, et mis on paratamatu, see on ka tegelik. Kui mingi sündmuse toimumine on paratamatu, siis see sündmus ka toimub. (5.1.5) ütleb, et A-s kirjeldatud sündmus ei ole võimalik parajasti siis, kui ta on võimatu. (5.1.6) ütleb, et A-s kirjeldatud sündmuse mittetoimumine ei ole võimalik parajasti siis, kui tema toimumine on paratamatu.

---

[99] Me nimetame siin *modaalloogikaks* teooriat sellistest modaalsustest nagu *paratamatu.* Kui tegemist on teistlaadi modaalsustega, siis kasutame erinime. Näiteks modaalsusi nagu *kohustuslik* uurib *deontiline loogika.* – Mõnikord nimetatakse modaalloogikaks aga mis tahes modaalsuste loogilist teooriat. Sel juhul täpsustatakse, et meie „modaalloogika“ tegeleb *aleetiliste* modaalsustega, aga deontiline loogika *deontiliste* modaalsustega.

[100] Ing k: ***N*** *–* ***N****ecessary*; ***P*** *–* ***P****ossible*; ***I*** *–* ***I****mpossible.*

Definitsioon (5.1.7) ütleb, et väitest A järeldub väide B parajasti siis, kui implikatsiooni $(A \rightarrow B)$ tõesus on loogiliselt paratamatu (*LA*-s: kui see implikatsioon on samaselt tõene).

5.2. Mis on deontiline loogika

Deon tähendab kreeka keeli: „kohustus“. *Deontiline loogika* on *kohustuste loogika.* See on käskude ja keeldude loogiline teooria. Uuritakse sarnaseid modaalsusi nagu *kohustuslik.* Eesmärgiks pole põhjendada näiteks reeglit, et tappa ei tohi. Eesmärgiks on uurida mis tahes normide omavahelisi loogilisi seoseid. Deontiline loogika on kaasaegse õigusfilosoofia haru.

Deontilise loogika algeid võib leida juba XIV sajandist. 1926. a aga üritas Mally deontilisi seoseid esitada sümbolloogika keeles, ent takerdus raskustesse ja tema uurimus jäi tähelepanuta (McNamara 2006: 199). Kaasaegse deontilise loogika rajas Soome tuntuim filosoof von Wright (1916 – 2003), Wittgensteini õpilane. Tähtteoseks oli tema kuulsaim artikkel *Deontiline loogika*, mis ilmus 1951. aastal[101] ja on nüüdseks eestindatud (Wright 2001e). Seejärel ilmus temalt veel kirjutisi samal teemal (vt nt Wright 2001f & 2001g & (1982: 245–57)).

Tavaliselt käsitletakse vaid kolme deontilist modaalsust: *kohustuslik*; *lubatav*; ja *keelatud*, mis sarnanevad aleetilistele modaalsustele *paratamatu*; *võimalik*; ja *võimatu.* Võtame nende deontiliste modaalsuste tähistamiseks kasutusele järgmised operaatorite sümbolid[102]:

O – *kohustuslik*;
A – *lubatav;*
F – *keelatud.* **(5.2.1)**

Olgu väide B mingi tegevuse kirjeldus. Siis näiteks avaldis

$$\boldsymbol{O}B \qquad \textbf{(5.2.2)}$$

teatab, et väites B kirjeldatud tegevus on kohustuslik.

Aksioomide (5.1.5) ja (5.1.6) deontilised analoogid on mõistetavad:

$$\sim\boldsymbol{A}B \leftrightarrow \boldsymbol{F}B \qquad \textbf{(5.2.3)}$$
$$\sim\boldsymbol{A}\sim B \leftrightarrow \boldsymbol{O}B \qquad \textbf{(5.2.4)}$$

Aksioom (5.2.3) ütleb, et tegevus B ei ole lubatav parajasti siis, kui ta on keelatud. (5.2.4) ütleb aga, et tegevusest B loobumine ei ole lubatav parajasti siis, see tegevus on kohustuslik.

Deontilise loogika eripärana puuduvad siin aksioomide (5.1.3) ja (5.1.4) analoogid. Tõepoolest: sellest, et midagi tehakse, ei järeldu, et seda tohib teha. Samuti: sellest, et mingi tegevus on kohustuslik, ei järeldu, et seda ka tehakse. Vastasel korral polekski seaduseid ega karistusi vaja.

Von Wrighti üheks küsimuseks on, kuidas avada sulgusid. Näiteks avaldis $\boldsymbol{A}(B \vee C)$ teatab, et on lubatav teha *B ja/või C.* Kas see tähendab: $\boldsymbol{A}B \ \& \ \boldsymbol{A}C$ (on lubatav teha B ja on lubatav teha C)?

Detailid on keerukad. Näiteks „liberaalses süsteemis“ ülalt on lubatav kõik, mida pole ära keelatud. Ent „Preisi süsteemis“ on keelatud kõik, mille jaoks luba pole antud.

[101] Von Wright, G. H. (1951) „Deontic Logic.“ *Mind* 60: 1–15.
[102] Vältisime kattumisi tähistusega (5.1.1). Ing k: ***O*** – ***O****bligatory*; ***A*** – ***A****llowable*; ***F*** – ***F****orbidden.*

Vastuolulised seadused

Käsud ja keelud pole väited – nad ei kirjelda tegelikku maailma. Ometi räägitakse mõnikord, et seadused on „vastuolulised“. – Seadus on „loogiliselt vasturääkiv“ (näiteks: *Tee nii ja ära tee nii!*) parajasti siis, kui mis tahes käitumise korral on seda seadust rikutud. Vasturääkiva seaduse täitmine on loogiliselt võimatu – mis tõttu kõik inimesed on siis seaduserikkujad.

Ülesandeid

1. Kirjutage modaalloogika keeles:
    - 1.1. Leidub miski, mis on paratamatult olemas.
    - 1.2. Kui Jumal on olemas, siis on ta olemas paratamatult.
    - 1.3. Kui kivi käest lahti lasta, siis on paratamatu, et ta kukub maha.
    - 1.4. On paratamatu, et kui kivi käest lahti lasta, siis ta kukub maha.
    - 1.5. Kõik on võimalik.
    - 1.6. Avarii juhtus juhuslikult.
2. Kirjutage deontilise loogika keeles:
    - 2.1. Tohib teha tegevust *B* ja samuti tohib teha tegevust *C*.
    - 2.2. Tohib teha tegevust *B & C*.
    - 2.3. Kui politseisse teatamine pole kohustuslik, siis on lubatud teatamata jätta.
    - 2.4. Kõik, mis ma tegin, oli lubatud.
    - 2.5. Kõik, mis on keelatud, seda ma ka teen.
    - 2.6. Arvestades reaalseid asjaolusid, pole võimalik seda seadust täita.
    - 2.7. Ta tegi kahte asja korraga. Ühte neist pidi ta tegema, aga teist ei tohtinud teha.

Kirjandust

McNamara (2006) „Deontic Logic.“ In *Handbook of the History of Logic. Vol 7. Logic and the Modalities in the Twentieth Century.* Ed by Dov M. Gabbay & J. Woods (Amsterdam, etc: Elsevier North Holland), pp 197–288.

Tamme jt. (1997) *Loogika. Mõtlemisest tõestamiseni.* Tartu: TÜ Kirjastus. – Siit peatükk: „12. Modaalloogika“ (lk 235–48).

Vuks (1999) *Traditsiooniline formaalne loogika.* Tartu: Sihtasutus Iuridicum. – Siit peatükk: „7. Modaalsed laused. Põhilised mõisted“ (lk 113–25).

Wright (1982) *Logiikka, filosofia ja kieli* (Keuruu: Kustannusosakeyhtio Otavan painolaitokset), lk 112–25 & 245–57.

Wright (2001e) „Deontiline loogika.“ Tema raamatus *Filosoofia, loogika, normid* (Tln: Vagabund), lk 59–81.

Wright (2001f) „Kas on olemas normide loogikat?“ Tema raamatus *Filosoofia, loogika, normid* (Tln: Vagabund), lk 83–117.

Wright (2001g) „Deontiline loogika – nagu mina seda näen.“ Tema raamatus *Filosoofia, loogika, normid* (Tln: Vagabund), lk 119–41.

6. IMPLIKATSIOON, JÄRELDUS, KONDITSIONAAL JA KONTRAFAKTUAAL

Järgnevalt käsitleme tähtsate ja eksitavalt sarnaste mõistete *implikatsioon*, *loogiline järeldus*, *konditsionaal* ja *kontrafaktuaal* olulisi erinevusi.

Implikatsioon
Kui A ja B on mingid väited, siis nende *implikatsiooni* $(A \rightarrow B)$ võib defineerida ka järgnevalt:

$$Def\ 1:\ (A \rightarrow B) = (\sim A \vee B) \qquad \textbf{(6.1)}$$
$$Def\ 2:\ (A \rightarrow B) = \sim(A\ \&\ \sim B) \qquad \textbf{(6.2)}$$

Võrdusmärk = ülal tähendab loogilist samaväärsust.

Implikatsiooni nimetatakse ka *materiaalseks implikatsiooniks*, sest üldiselt sõltub väite $(A \rightarrow B)$ tõeväärtus maailma omadustest. Implikatsioon on *2*-valentse loogika tehe. Kui väitel A ja väitel B on üks tõeväärtus kahest: *tõene* või *väär*, siis on ka väitel $(A \rightarrow B)$ üks tõeväärtus kahest: *tõene* või *väär.* Valemist (6.2) näeme, et $(A \rightarrow B)$ on väär parajasti siis, kui A on tõene ja B on väär.

Loogiline järeldus
Loogilise järelduse $(A \Rightarrow B)$ võib defineerida ka järgnevalt:

$$Def\!:\quad (A \Rightarrow B) \leftrightarrow \boldsymbol{N}(A \rightarrow B) \qquad \textbf{(6.3)}$$

Märk $\boldsymbol{N}$ ülal tähendab: *loogiliselt paratamatu* (vt (5.1.7)). Selline loogilise järelduse mõiste taandub *paratamatult tõese implikatsiooni* mõistele, lausearvutuses konkreetsemalt *samaselt tõese implikatsiooni* mõistele. Näiteks $[(A\ \&\ B) \rightarrow B]$ on samaselt tõene implikatsioon. Tema tõesus on garanteeritud antetsedendi $(A\ \&\ B)$ ning konsekvendi B loogilise vormiga. Seetõttu nimetatakse loogilist järeldust ka *formaalseks implikatsioooniks.*

Järelduse definitsioonist (6.3) tuleneb implikatsiooni definitsiooni (6.1) tõttu, et *vastuolulistest eeldustest järeldub mis tahes väide.* Implikatsioon $(A \rightarrow B)$ on ju tõene, niipea kui antetsedent A on väär. Kui aga eeldused on kooskõlalised, siis: *Järeldus kehtib parajasti siis, kui on loogiliselt paratamatu, et KUI eeldused on tõesed, SIIS on tõene ka tulem.*

Konditsionaal
Konditsionaal on *tingimuslik* ehk *„kui ... siis ...“*-tüüpi lause:

Kui A, siis B. **(6.4)**

Ent kuigi konditsionaal (6.4) tõlgitakse lausearvutuse implikatsiooniks $(A \rightarrow B)$, pole siiski päris selge, kas lause (6.4) on *2*-valentse loogika objekt. Sest milline on lause (6.4) tõeväärtus juhul, kui A on väär? Implikatsioon $(A \rightarrow B)$ on aga sõnastatav ka nii:

A *on kas väär või* ***kui*** A *on tõene,* ***siis*** B *on tõene.* **(6.5)**

Konditsionaali (6.4) tõlkimisel implikatsiooniks (6.5) eeldame me, et võime häirimatult lugeda konditsionaali (6.4) tõeseks juhul, kui antetsedent A on väär. – Ent kas sedasi tohib alati teha?

Kontrafaktuaal

Kontrafaktuaal (ing k: *counterfactual*) on teatud tüüpi *faktivastane konditsionaal* (ing k: *counterfactual conditional*). Konditsionaalis (6.4) on siis antetsedent *A* väär. Kontrafaktuaalid on *oleks*-laused. Näiteks:

Kui oleks olnud A, *siis oleks olnud* B. **(6.6)**

Selline lause eeldab, et väites *A* kirjeldatud sündmus tegelikult aset ei leidnud: ~*A*.

Kuigi väljendist *oleks* räägitakse anekdoote ja mõni leiab, et ajalugu ei tundvat *oleks*-eid, tähendaks *oleks*-ite ärakeelamine mõtlemise ärakeelamist. Antropoloogid on leidnud, et madalaltarenenud mõistusega rahvad ei oskavat *oleks*-ites mõtelda.

Ent kontrafaktuaalides väljendame me oma fundamentaalseid uskumusi maailma kohta. Kui te usute, et Newtoni seadused kehtivad, siis usute te ka seda, et kui ma oleks viis minutit tagasi kivi käest lahti lasknud (mida ma aga ei teinud), siis oleks see kivi maha kukkunud. Ka eetika ja kohtumõistmine poleks võimalikud *oleks*-tüüpi lauseteta. Näiteks lause *Kui ma oleksin teda aidanud, poleks ta uppunud.*

Kontrafaktuaalide probleem on uskumatult segane ja veel praegugi intensiivsete uuringute ning vaidluste ala. Ma leian, et kontrafaktuaalide, nende tähtsuse ja nendega seotud probleemide avastamine oli XX sajandi analüütilise filosoofia üks suuremaid saavutusi – mis ühtlasi lükkab ümber obskurantliku ideoloogia, et analüütiline filosoofia olevat tühi sõnanärimine.

Naasegem nüüd oma põhiteema juurde. Kuigi kontrafaktuaali antetsedent on väär, ei loeta kontrafaktuaali automaatselt tõeseks. Vastupidi. Näiteks lause *Kui ma oleksin kivi käest lahti lasknud (mida aga ei juhtunud), siis oleks see maha kukkunud*, loeme me tõeseks, sest usume gravitatsiooniseadusesse. Ent lause *Kui ma oleksin aevastanud (mida ma aga ei teinud), siis oleks Jaapanis puhkenud maavärin*, loeme me analoogilistel põhjustel vääraks. – Niisiis kontrafaktuaali tõeväärtus sõltub maailma omadustest.[103] Kontrafaktuaalile ei vasta lausearvutuse tehe.

Kontrafaktuaali ei saa automaatselt tõlkida implikatsiooniks. **(6.7)**

Näiteid

IMPLIKATSIOON:	*Ma ei vajuta lülitile või tuli läheb põlema.*
KONDITSIONAAL:	*Kui ma vajutan lülitile, siis tuli läheb põlema.*
KONDITSIONAAL:	*Kui Kennedy't ei tapnud Oswald, siis tegi seda keegi teine.*
KONTRAFAKTUAAL:	*Kui Oswald poleks Kennedy't tapnud,* *oleks seda teinud keegi teine.*

Kirjandust

Conditionals (1991) Ed by F. Jackson. Oxford, etc: Oxford UP.
Goodman (1983) „The Problem of Counterfactual Conditionals." Tema raamatus *Fact, Fiction and Forecast* (Cambridge, USA & London, UK: Harvard UP), pp 3–27.
Guttenplan (1986) „Translating into Sentential." Tema raamatus *The Languages of Logic: An introduction* (Oxford & NY: Blackwell), pp 105–23.
Lewis (1986) *Counterfactuals.* Oxford: Basil Blackwell.
Sanford (2003) *If P, then Q. Conditionals and the foundations of reasoning.* London & NY: Routledge.
Stalnaker (1984) *Inquiry.* Cambridge, USA: Bradford Books.

[103] Teine võimalus on arvata, et kontrafaktuaal polegi *tõene/väär*, vaid näiteks *õige/vale* või *kohane/kohatu.*

7. LOOGIKA RAKENDUSI

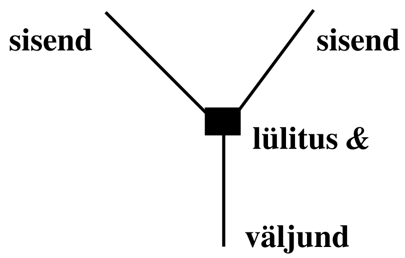
Me tunneme juba mitmeid loogika rakendusi. Näiteks nägime, millised ohud meid varitsevad kõnekeeles kirjutamisel ning kuidas ennast täpselt väljendada. Nii teadvustasime, et *A ja/või B*, ning *Kas A või B*, on erinevat tüüpi laused. Me tunneme ka samasuse seadust ning teame, et range arutluse vältel ei tohi sõnade tähendused muutuda. Me oskame mõisteid täpselt defineerida. Me õppisime, kuidas analüüsida tekstina esitatud arutlust. Me oskame tekstist leida vastuolusid. Me oskame kellegi seisukohta kritiseerida arutlusvõtte *reductio ad absurdum* abil, näidates, et sellest seisukohast (võimalik, et ühes üldtunnustatud eeldustega) järeldub vastuolu. Me nägime, kuidas sümbolkeeles analüüsida käskude ja keeldude struktuuri ning millised probleemid siin peituvad. Me teame, et loogikat rakendatakse filosoofias ning ka teadusteooriate ülesehitamisel ja nende hilisemal analüüsimisel. – Ent me nägime ka, et loogika rakendusala on küll laiaulatuslik, ent siiski mitte nii hõlmav, kui seda mõnikord arvatakse. Sest midagi rangelt tõestada saab empiirilistes teadustes vaid haruharva ja loogika rolliks on siin pigem vastuolude ning vigade avastamine.[104]

Järgnevalt vaatleme loogika rakendamist *loogilistes lülitustes* ning *argumentatsioonis.*

7.1. Loogilised lülitused

Kahevalentses loogikas on igal väitel vaid kaks võimalikku tõeväärtust: *tõene – 1*; ja *väär – 0.* Elektrilistes skeemides vastab sellele kaks võimalust: juhtmes on pinge olemas (ületab läve) – *1*; või pinge puudub (ei ületa läve) – *0.* Nii vastavadki *2*-valentsele loogikale elektroonilised *digitaalsüsteemid.* Lausearvutuse tehetele *negatsioon*; *konjunktsioon*; jne aga vastavad elektroonilised *loogilised lülitused* (vt nt (Cryan jt 2003: 40–42) või (Зегет 1985: 106–16)). Elektrooniliste skeemide käitumist saab välja arvutada tõesustabelitega. Selle avastuse tegi Alan Turing (1912 – 54), kellele me võlgneme digitaalarvutite ja programmeerimise leiutamise.

Näiteks konjunktsioonitehtele *&* vastab järgmine elektrooniline lülitus (vt *Joonis 6* allpool):



JOONIS 6
***Loogiline lülitus* &**

Selles lülituses on väljundis pinge parajasti siis, kui pinge on mõlemas sisendis. Näiteks müügiautomaat annab kohvi vaid siis, kui münt on sisse pandud *ja* on vajutatud nupule *kohv.*

Tautoloogiale vastab valesti koostatud turvasüsteem, mis undab kogu aeg – olenemata sellest, kas sisse on murtud. Vastuolule vastab aga turvasüsteem, mis kunagi ei unda.

Väga keerukal tasemel rakendatakse loogikat infotehnoloogias, arvutiteaduses, programmeerimises ja tehisintellekti uuringutes (vt nt (Tamme jt 1997: 295–385) või Lorents 2000). Ent õpikutarkusest ei piisa, remontimaks tänapäeva arvuteid ja autosid. Nad tuleb viia töökotta spetsialistide juurde.

[104] Hea lühiülevaate loogika erinevatest rakendustest XX sajandil annab Cryan jt 2003.

7.2. Argumentatsioon

Esimese süsteemse loogikateooria rajajaks peetakse Kreeka mõtlejat Aristotelest (384 – 322 ema). Ent veel enne teda uurisid ja kasutasid Kreekas loogikareegleid *sofistid* (V ja IV saj ema). Sofistid valdasid ja õpetasid *väitluskunsti* (vt nt (Grauberg 1989: 5–19 & 1996: 13–9)). Nad õpetasid, kuidas kohtus või poliitikas rahva ees esineda ja oma oponentidega vaielda. Seejuures õpetasid nad *retoorikat* ehk *kõnekunsti.* Näiteks millal teha kõnes paus, millal rääkida vaikselt, millal valjult, millal pilgata ja millal arutleda. Kas esineja riided peavad olema puhtad jms. Eesmärgiks oli võita kuulajate poolehoid, sest kuulajate antud häältest sõltus vastuvõetud otsus. Sofistid õpetasid ka, kuidas arutleda ja milliseid *argumente* esitada. Siia juurde kuulus ka *loogikareeglite* õpetamine, sest vastase seisukoha vastuolulisuse näitamine on ju selle seisukohta veenev kriitika.

Niisiis tekkis loogikateadus ühes väitluskunstiga. Sel ajaloolisel põhjusel on traditsioonilise loogika õpikuis sageli juttu mitte ainult puhtast loogikast, vaid ka *argumenteerimisvõtetest* ja *-vigadest* (vt nt Grauberg 1989 & 1999 või (Meos 2003a: 89–105)), aga mõnikord on käsitletud isegi *retoorikat* (vt nt (Meos 2003a: 103–5)).

Ent sõnal „retoorika" on teinekord põlglik varjund: sellega märgistatakse sisutühja ilukõnet. Samuti pole kaugeltki kindel, et inimeste veenmiseks on alati parim vahend olla loogiliselt järjekindel. Õigupoolest just sofistid ise kasutasid paradokse nagu näiteks Valetaja paradoks ja nn *sofisme – pettejäreldusi.* Tänapäeva teaduste jaotuses kuulub enamus retoorika teemasid pigem *psühholoogia* kui loogika alla. Kaasaegse loogika õpikuis retoorikast tavaliselt juttu ei olegi.

Ent kaasaegse loogika õpikuis on harva juttu ka argmenteerimisvõtetest ja -vigadest, millest enamus siiski kuuluvad loogika uurimissfääri.[105] – Kui neist ei räägita loogikas, millal me neist siis kuuleme? Haritud ja kultuurne inimene peaks ikkagi teadma näiteks järgmisi termineid:

SOFISM	–	*pettejäreldus*
REDUCTIO AD ABSURDUM	–	*absurdile viimise argument.* *Mingi seisukoha kritiseerimiseks näidatakse,* *et sellest seisukohast* *(võimalik, et ühes üldtunnustatud eeldustega)* *järeldub vastuolu.*
ARGUMENTUM AD HOMINEM	–	*argument, mis ründab mitte isiku seisukohta* *ja argumente,vaid tema isikut*
ARGUMENTUM AD RES	–	*argument, mis lähtub räägitavast asjast*
RINGTÕESTUS	–	*ringtõestuses eeldatakse mingi väite* A *tõestamiseks* *selle väite* A *tõesust.* *Ringtõestusega ei saa midagi tõestada –* *vastasel korral saaks „tõestada" mis tahes väidet.*

[105] Sümbolloogika raamatuist käsitlevad argumentatsiooni lähemalt nt (Kelley 1990: 77–166) ja Vorobej 2006.

Ülesandeid

1. Milline on negatsiooni loogiline lülitus?
2. Milline on disjunktsiooni loogiline lülitus?
3. Konstrueerige mõni tautoloogiline loogiline lülitus.
4. Millistel juhtudel sätestab seadus *argumentum ad hominem* kohustusliku rakendamise?
5. Millised järgmistest arutlustest on millegipoolest vildakad? Kui leiate mõne vea, siis milles see viga seisneb? Iseloomustage iga arutlust võimaluse korral sobiva terminiga:
   5.1. Kõik linnud lendavad. Mõned linnud on lollid. Seega: Mõned lollid lendavad.
   5.2. Jänesel on pikad jalad. Siilil on lühikesed jalad. Seega: Jänes pole siil.
   5.3. Jänesel on pikad jalad. Valel on lühikesed jalad. Seega: Jänes on õige.
   5.4. Ždanov: *Zoštšenko on jätis. – Miks ta jätis on?* – Ždanov: *Sest ta kuulub Leningradi räpastesse kirjandusringkondadesse. – Miks need ringkonnad räpased on?* – Ždanov: *Sest nad hoiavad endi rüpes säärast jätist nagu Zoštšenko. Nad kõik tuleks Siberisse saata!*
   5.5. Kui ringtõestust saaks tõestustes kasutada, siis saaks tõestada ka vastuolusid. Järelikult ringtõestust ei saa tõestustes kasutada.
   5.6. Mart Nikluse juttu Eesti „okupeerimisest“ ei maksa tõsiselt võtta. Ta on homoseksualist ja hiljuti arreteeriti ta kaupluses, kui ta üritas pulgakommi varastada.

Kirjandust

Cryan jt (2003) *Juhatus loogikasse.* Tln: KOGE.

Grauberg (1989) „Vaidluskunsti ajaloost.“ Tema raamatus *Loogika ja vaidluskunst* (Tln: Olion), lk 5–19.

Grauberg (1996) „Mida arvasid väitlus- ja kõnekunstist antiikmõtlejad?“ Tema raamatus *Loogika, keel ja mõtlemine* (Tln: Tallinna Bakalaureuse Erakool), lk 13–9.

Kelley (1990) „Arguments.“ Tema raamatus *The Art of Reasoning with Symbolic Logic* (London & NY: W. W. Norton & Company), pp 77–166.

Lorents (2000) *Keel ja loogika.* Tln: Estonian Business School.

Meos (2003a) „Argumentatsioon ja kriitika.“ Tema raamatus *Loogika, argumentatsioon, mõtlemiskultuur* (Tln: Koolibri), lk 89–105.

Tamme jt (1997) *Loogika. Mõtlemisest tõestamiseni.* Tartu: TÜ Kirjastus. – Siit peatükk: „IV Loogika rakendusi programmeerimises ja tehisintellektis“ (lk 295–385).

Vorobej (2006) *A Theory of Argument.* Cambridge: Cambridge UP.

Vuks (1999) *Traditsiooniline formaalne loogika* (Tartu: Sihtasutus Iuridicum), lk 137–201.

Wright (1982) *Logiikka, filosofia ja kieli* (Keuruu: Kustannusosakeyhtio Otavan painolaitokset), lk 126–257.

Зегет (1985) *Элементарная логика* (М: Высшая школа), сс 106–16.

KIRJANDUSVIITED

Aristotle (1995a) *Categories.* In *The Complete Works of Aristotle. Volume 1.* The Revised Oxford Translation. Ed by J. Barnes (New Jersey: Princeton UP), pp: 3–24.

Aristotle (1995b) *The Interpretatione.* In *The Complete Works of Aristotle. Volume 1.* The Revised Oxford Translation. Ed by J. Barnes (New Jersey: Princeton UP), pp: 25–38.

Aristotle (1995c) *Prior Analytics.* In *The Complete Works of Aristotle. Volume 1.* The Revised Oxford Translation. Ed by J. Barnes (New Jersey: Princeton UP), pp: 39–113.

Aristotle (1995d) *Metaphysics.* In *The Complete Works of Aristotle. Volume 2.* The Revised Oxford Translation. Ed by J. Barnes (New Jersey: Princeton UP), pp: 1552–728.

Bacon, F. (1952) *Novum Organum.* In his: *Advancement of Learning. Novum Organum. New Atlantis* (Chicago, etc: Encyclopædia Britannica, Inc.), pp 103–95.

Blackburn, S. (2002) *Oxfordi filosoofialeksikon.* Tln: Vagabund.

Carnap, R. (1951) *The Nature and Application of Inductive Logic.* Chicago: The University of Chicago Press.

Conditionals (1991) Ed by F. Jackson. Oxford, etc: Oxford UP.

Cryan, D., Shatil, S. & Mayblin, B. (2003) *Juhatus loogikasse.* Tln: KOGE.

Descartes, R. (1993) „Meditations on First Philosophy." In his *Discourse on Method and Meditations on First Philosophy* (Cambridge, USA: Hackett Publishing Company), pp 45–105.

Dipert, R. (1998) „Logic in the 19th Century." In *Routledge Encyclopedia of Philosophy, Vol. 5.* Gen. ed. E. Craig (London & NY: Routledge), pp 722–9.

Eintalu, J. (1996) *Filosoofiline sissejuhatus loogikasse.* Tln. Avaldamata.

Eintalu, J. (1998) "Loogika mõistetamatusest." *Võro Instituudi Toimõtiseq 5. Arutlusi teadusest ja tõest*, lk 114–9.

Eintalu, J. (2001). *The Problem of Induction: The Presuppositions Revisited.* Dissertationes philosophicae Universitatis Tartuensis 1. Tartu: Tartu UP.

Eintalu, J. (2003) "Hume'i jultumus." *Akadeemia* 4: 782–807.

Eintalu, J. (2005) *Filosoofia põhiküsimusi.* Tln: Sisekaitseakadeemia.

Eintalu, J. (2006) *Loogika näidisülesanded ja harjutused.* Tln: Sisekaitseakadeemia.

Eintalu, J. & Notturno, M. (1999) "Induktsioon ja oletus. I." *Akadeemia* 10: 2147–74.

Engel, P. (1998) „Propositions, Sentences and Statements." In *Routledge Encyclopedia of Philosophy, Vol. 7.* Gen. ed. E. Craig (London & NY: Routledge), pp 787–8.

Fogelin, R. (1992) *Philosophical Interpretations.* Oxford & NY: Oxford UP.

Forbes, G. (1994) *Modern Logic: A text in elementary symbolic logic.* NY & Oxford: Oxford UP.

Frege, G. (1999) „17 põhilauset loogikale (1876/77)." *Tähendus, tõde, meetod. Tekste analüütilisest filosoofiast. I.* Toim. J. Kangilaski & M. Laasberg (Tartu: TÜ Kirjastus), lk 20–21.

Goodman, N. (1983) „I. The Problem of Counterfactual Conditionals." Tema raamatus *Fact, Fiction and Forecast* (Cambridge, USA & London, UK: Harvard UP), pp 3–27.

Grauberg, E. (1989) *Loogika ja vaidluskunst.* Tln: Olion.

Grauberg, E. (1996) *Loogika, keel ja mõtlemine.* Tln: Tallinna Bakalaureuse Erakool.

Guttenplan, S. (1986) *The Languages of Logic: An introduction.* Oxford & NY: Blackwell.

Hacking, I. (2001) *An Introduction to Probability and Inductive Logic.* Cambridge: Cambridge UP.

Halverson, W. H. (1984) *A Concise Logic.* NY: Random House.

Hume, D. (1985) *A Treatise of Human Nature.* London: Penguin Books.

Husserl, E. (2001) *Logical investigations.* London & NY: Routledge.

Induction and Deduction in the Sciences (2003) Ed by F. Stadler. *Vienna Circle Institute Yearbook 11.* Dordrecht etc: Kluwer Academic Publishers.

Kant, I. (1982) *Prolegomena igale tulevasele metafüüsikale, mis on võimeline esinema teadusena.* Tln: Eesti Raamat.

Kelley, D. (1990) *The Art of Reasoning with Symbolic Logic.* London & NY: W. W. Norton & Company.

Klemm, P. (1973) *Kivikirvest aurumasinani: jutte tehnika 100 000 aastasest ajaloost.* Tln: Valgus.

Künne, W. (1998) „Bolzano, Bernard (1781 – 1848)." In *Routledge Encyclopedia of Philosophy, Vol. 1.* Gen. ed. E. Craig (London & NY: Routledge), pp 823–8.

Lewis, D. (1986) *Counterfactuals.* Oxford: Basil Blackwell.

Lilleorg, I. (1999) *Loogika: harjutused ja ülesanded.* Tln: Sisekaitseakadeemia.

Lipton, P. (1991) *Inference to the best Explanation.* London: Routledge.

Lorents, P. (2000) *Keel ja loogika.* Tln: Estonian Business School.

McNamara, P. (2006) „Deontic Logic." In *Handbook of the History of Logic. Vol 7. Logic and the Modalities in the Twentieth Century.* Ed by Dov M. Gabbay & J. Woods (Amsterdam, etc: Elsevier North Holland), pp 197–288.

Meos, I. (2003a) *Loogika, argumentatsioon, mõtlemiskultuur.* Tln: Koolibri.

Meos, I. (2003b) „Järeldusreegel Modus Tollens." *Horisont* 3: 51.

Moore, G. (1998) „Logic in the Early 20th Century." In *Routledge Encyclopedia of Philosophy, Vol. 5.* Gen. ed. E. Craig (London & NY: Routledge), pp 729–38.

Passmore, J. A. (1978) „New Developments in Logic." In his *A Hundred Years of Philosophy* (Harmondsworth, etc: Penguin Books), pp 120–55.

Popper, K. (2004) *The Logic of Scientific Discovery.* London & NY: Routledge Classics.

Quine, W. (1999) „Empirismi kaks dogmat." *Tähendus, tõde, meetod. Tekste analüütilisest filosoofiast. I.* Toim. J. Kangilaski & M. Laasberg (Tartu: TÜ Kirjastus), lk 194–219.

Ramsey, F. (1999) „Tõsiasjad ja propositsioonid (1927)." *Tähendus, tõde, meetod. Tekste analüütilisest filosoofiast. I.* Toim. J. Kangilaski & M. Laasberg (Tartu: TÜ Kirjastus), lk 78–93.

Rescher, N. (1998) „Futuristic Ontology: The Truth Status of Claims about the Future." In his *Predicting the Future. An Introduction to the Theory of Forecasting* (Albany, USA: State University of New York Press), pp 69–71.

Russell, B. (1979) „The Existence of God. A Debate Between Bertrand Russell and Father F. C. Copleston, SJ (BBC 1948)." In his *Why I am not a Christian and other essays on religion and related subjects* (London & NY: Routledge), pp 133–53.

Russell, B. (2005) „Aristotle's Logic." In his *History of Western Philosophy* (London & NY: Routledge), pp 188–94.

Sanford, D. H. (2003) *If P, then Q. Conditionals and the foundations of reasoning.* London & NY: Routledge.

Stalnaker, R. (1984) *Inquiry.* Cambridge, USA: Bradford Books.

Stead, C. (1998) „Logos." In *Routledge Encyclopedia of Philosophy, Vol. 5.* Gen. ed. E. Craig (London & NY: Routledge), pp 817–9.

Tamme, T., Tammet, T. & Prank, R. (1997) *Loogika. Mõtlemisest tõestamiseni.* Tartu: TÜ Kirjastus.

Tarski, A. (1965) *Introduction to Logic and to the Methodology of Deductive Sciences.* NY: Oxford UP.[106]

Tarski, A. (1999) „Semantiline tõekontseptsioon ja semantika alused." *Tähendus, tõde, meetod. Tekste analüütilisest filosoofiast. I.* Toim. J. Kangilaski & M. Laasberg (Tartu: TÜ Kirjastus), lk 143–83.

Tarski, A. (2000) „Tõde ja tõestamine." *Akadeemia* 3: 579–606.

The New Encyclopædia Britannica (1994) Vol. 7. Chicago, etc: Encyclopædia Britannica, Inc.

Thom, P. (1998) „Logic, Ancient." In *Routledge Encyclopedia of Philosophy, Vol. 5.* Gen. ed. E. Craig (London & NY: Routledge), pp 687–93.

Uustalu, T. (2000) „Tarski, Gödel ja kes neist ei järeldu." *Akadeemia* 3: 607–24.

Voltaire (1986) „Kõik on hästi." Tema raamatus *Filosoofiline sõnaraamat (*Tln: Eesti Raamat), lk 90–97.

Vorobej, M. (2006) *A Theory of Argument.* Cambridge: Cambridge UP.

Vuks, G. (1999) *Traditsiooniline formaalne loogika.* Tartu: Sihtasutus Iuridicum.

Wittgenstein, L. (1996) *Loogilis-filosoofiline traktaat.* Tartu: Ilmamaa.

Wittgenstein, L. (2005) *Filosoofilised uurimused.* Tartu: Ilmamaa.

Wright, von G. H. (1982) *Logiikka, filosofia ja kieli.* Keuruu: Kustannusosakeyhtio Otavan painolaitokset.

Wright, von G. H. (2001a) „Propositsioonide demüstifitseerimine." Tema raamatus *Filosoofia, loogika, normid* (Tln: Vagabund), lk 351–69.

Wright, von G. H. (2001b) „Vorm ja sisu loogikas." Tema raamatus *Filosoofia, loogika, normid* (Tln: Vagabund), lk 31–58.

Wright, von G. H. (2001c) „Determinism ja tulevane tõde." Tema raamatus *Filosoofia, loogika, normid* (Tln: Vagabund), lk 331–50.

Wright, von G. H. (2001d) „Valetaja paradoks." Tema raamatus *Filosoofia, loogika, normid* (Tln: Vagabund), lk 267–81.

Wright, von G. H. (2001e) „Deontiline loogika." Tema raamatus *Filosoofia, loogika, normid* (Tln: Vagabund), lk 59–81.

106 See loogika klassikaline õpik on ilmunud ka vene keeles.

Wright, von G. H. (2001f) „Kas on olemas normide loogikat?“ Tema raamatus *Filosoofia, loogika, normid* (Tln: Vagabund), lk 83–117.
Wright, von G. H. (2001g) „Deontiline loogika – nagu mina seda näen.“ Tema raamatus *Filosoofia, loogika, normid* (Tln: Vagabund), lk 119–41.

Зегет, В. (1985) *Элементарная логика.* М: Высшая школа.[107]

[107] Tõlge raamatust: Segeth, W. (1973) *Elementare logik.* Berlin: Veb Deutscher Verlag der Wissenschaften.