

SISEKAITSEAKADEEMIA

Helmo Käerdi

DIFERENTSIAALARVUTUS

Tallinn 2009

Õppevahend Sisekaitseakadeemia päästeteenistuse ning maksunduse ja tolli erialade üliõpilastele. On kasutatav ka teistes kõrgkoolides erialadel, kus diferentsiaalvutust ei õpita põhiainena.

SISUKORD

SISSEJUHATUS	5
1. FUNKTSIOONID	6
1.1. Funktsiooni mõiste, määramispiirkond ja esitusviisid	6
1.2. Paaris-, paaritu ja perioodiline funktsioon	7
1.3. Monotoonsed funktsioonid. Pöördfunktsioon	8
1.4. Liitfunktsioon	10
1.5. Arkusfunktsioonid	10
1.6. Elementaarfunktsioonid	12
1.7. Matemaatikafunktsioonid, valemid ja graafikud Excelis	12
2. FUNKTSIOONI PIIRVÄÄRTUS JA PIDEVUS	13
2.1. Funktsiooni piirväärtuse mõiste	13
2.2. Lõpmatult kahanevad suurused	13
2.3. Tehetega seotud piirväärtuste omadused	14
2.4. Lõpmatult kahanevate suuruste võrdlemine	16
2.5. Arv e . EkspONENTfunktsioon $y = e^x$. Naturaallogaritm $y = \ln x$	17
2.6. Pideva funktsiooni mõiste	19
2.7. Katkevad funktsioonid	19
3. FUNKTSIOONI TULETIS JA DIFERENTSIAAL	21
3.1. Funktsiooni tuletise mõiste ja interpretatsioonid	21
3.2. Diferentseerimise põhivalemid	23
3.3. Tehetega seotud diferentseerimisreeglid	23
3.4. Pöördfunktsiooni tuletis. Arkusfunktsioonide tuletis	24
3.5. Liitfunktsiooni tuletis	25
3.6. Joone puutuja ja normaali võrrand	26
3.7. Diferentsiaali mõiste ja geomeetriline tähendus	27
3.8. Diferentsiaali omadusi	29
3.9. Diferentsiaali kasutamine ligikaudsetes arvutustes	30
3.10. Kõrgemat järku tuletised	31

4. FUNKTSIOONI TULETISE RAKENDUSI	32
4.1. Lagrange'i keskvaartusteoreem	32
4.2. L'Hospitali reegel piirväärtuse arvutamiseks	33
4.3. Funktsiooni uurimine diferentsiaalarvutuse abil	34
4.4. Funktsiooni globaalsed ekstreemumid	36
4.5. Funktsiooni monotoonsuse tunnused	37
4.6. Funktsiooni lokaalsed ekstreemumid	38
4.7. Joone kumerus ja nõgusus. Käänupunktid	43
4.8. Joone asümptoodid	47
4.9. Funktsiooni uurimise ja graafiku konstrueerimise üldine plaan	48
4.10. Taylorigi valem	52
5. MITME MUUTUJA FUNKTSIOONI DIFERENTSIAALARVUTUS	56
5.1. Mitme muutuja funktsiooni mõiste ja määramispiirkond	56
5.2. Kahe muutuja funktsiooni piirväärtus ja pidevus	59
5.3. Osatuletised	60
5.4. Kõrgemat järku osatuletised	63
5.5. Täisdiferentsiaal	64
5.6. Täisdiferentsiaali kasutamine ligikaudsetes arvutustes	66
5.7. Kahe muutuja funktsiooni Taylorigi valem	68
5.8. Ilmutamata funktsiooni tuletis	68
5.9. Kahe muutuja funktsiooni lokaalsed ekstreemumid	70
5.10. Kahe muutuja funktsiooni globaalsed ekstreemumid	75
5.11. Lisatingimusega ekstreemumülesanne	79
KIRJANDUS	82

SISSEJUHATUS

Matemaatiline analüüs on matemaatika haru, mis uurib funktsioone ja nende üldistusi piirväärtuste meetodil. Matemaatilise analüüsi põhisisuks on diferentsiaalarvutus, integraalarvutus ja ridade teooria. Käesolevas õppevahendis käsitletakse funktsioone, piirväärtuste teooriat, ühe muutuja funktsiooni tuletist ja diferentsiaali ning nende rakendusi ja mitme muutuja funktsiooni diferentsiaalarvutust koos rakendustega.

Sisekaitseakadeemias õpitakse matemaatilist analüüsi päästeteenistuse erialal mahus 5 Euroopa ainepunkti (EAP), millest veidi üle poole moodustab diferentsiaalarvutus. Ülejäänud on integraalarvutus ja eraldi kursuse puudumise tõttu ka ülevaade esimest järku diferentsiaalvõrranditest. Lisaks käsitletakse õppeaines „Lineaaralgebra ja arvutusmeetodid“ (3 EAP) mõnesid diferentsiaalarvutuse rakendustega seotud arvutusmeetodeid: ligikaudsete arvutuste vea hindamine, interpoleerimine, numbriline diferentseerimine, võrrandi $f(x)=0$ lahendamine ja vähimruutude meetod. Arvutusmeetodite kohta on SKA-s kasutusel õppevahend [6] ja lineaaralgebras [5]. Maksunduse ja tolli erialal on õppeaine „Majandusmatemaatika“ (3 EAP) üheks olulisemaks komponendiks diferentsiaalarvutus ja selle rakendused (ligikaudu pool kursuse mahust; teine pool on lineaaralgebra elemendid ja protsentarvutus). Käesoleva õppevahendi sisukord ja päästeteenistuse eriala matemaatilise analüüsi diferentsiaalarvutust käsitleva osa aineprogrammi sisu langevad praktiliselt täielikult kokku. Maksunduse ja tolli eriala majandusmatemaatika väiksemast mahust tingituna tuleb seal piirduda antud õppevahendis toodud materjali valikulise ja lühendatud käsiteluga.

Matemaatilise analüüsi õpikud [3], [4], [7], [8], [9], [11], [17] ja [18] on orienteeritud ülikoolide vajadustele ning mitmed neist ([3], [4], [8] ja [11]) on ilmunud aastaid tagasi ja pole enam üldkättesaadavad. Õpikus [1] on käsitletud majandusteaduses kasutatavaid matemaatilisi meetodeid, mida on illustreeritud paljude, peamiselt mikroökonomika, vähemal määral makroökonomika valdkonda kuuluvate rakendustega. Teisalt on olemas mõned matemaatilist analüüsi käsitlevad materjalid, mis on mõeldud suhteliselt lühematele õppekursustele, näiteks [16], või on teatmikud, näiteks [2] ja [12]. Kesktasemel õppevahendeid on aga vähe, eriti niisuguseid, mis oleksid illustreeritud suurema hulga praktilise sisuga näiteülesannetega ja sobiksid seega paremini rakenduskõrgkoolidele. Praeguse SKA matemaatilise analüüsi põhiõppevahendi [13] brošeeritud köited on pikaajalise kasutamise käigus jõudnud füüsilise kulumise piirini. Pealegi pole olnud võimalust paigutada õppevahendit [13] SKA e-raamatukogusse. Alates 2008./2009. õppeaastast mindi Sisekaitseakadeemias üle väljundipõhiste õppekavadele, mis esitavad uusi nõudmisi õppevahendite sisu kohta. Eelnimetatud asjaolud tingisidki vajaduse kirjutada Sisekaitseakadeemia tarbeks uus diferentsiaalarvutuse õppevahend. Rakenduskõrgkooli eesmärke silmas pidades on õppevahendi rõhuasetused võrreldes ülikooli õpikutega mõnevõrra erinevad. Hoolimata sellest, et matemaatilise analüüsi, sealhulgas diferentsiaalarvutuse, põhimeetodiks on piirväärtuste teooria, on püütud piirväärtuste küsimust käsitleda suhteliselt kompaktselt ja rohkem rõhutada funktsiooni tuletist ja eriti selle rakendusi. SKA matemaatilise analüüsi kursuse piiratud mahu tõttu pole vaadeldud väljateooria elemente ja diferentsiaalarvutuse geomeetriselise rakendusi on puudutatud minimaalselt. Kaugõppijate vajadusi arvestades on õppevahendis hulgaliselt lahendatud ja pikemate kommentaaridega varustatud näiteülesandeid, sealhulgas ka esmapilgul lihtsatena tunduvate küsimuste kohta. Õppetöö praktika aga näitab, et rakendusülesannete lahendamise meetodid omandatakse üliõpilaste poolt pigem ladusamalt kui näiteks liitfunktsiooni tuletise leidmise tehnika.

Iseseisvaks lahendamiseks mõeldud ülesandeid pole õppevahendis toodud, sest Sisekaitseakadeemia hästitoimiv õppeinfosüsteem võimaldab sinna koduülesandeid operatiivselt paigutada. Seejuures saab paindlikumalt arvestada õppevormi, eriala ja konkreetse õpperühma tasemest tingitud spetsiifiliste vajadustega. Mahukates ja erineva raskusastmega ülesandeid sisaldavates ülesannete kogudes [10], [14] ja [15] võib olla rakenduskõrgkooli üliõpilasel raske orienteeruda. Pealegi on need raamatud muutunud aastate jooksul defitsiitseteks.

Käesolev õppevahend on Sisekaitseakadeemias kasutatava klassifikatsiooni kohaselt B-tüüpi, mis tähendab, et seda pole keeleteimetaja poolt redigeeritud ega retsenseeritud. Seetõttu palub koostaja mõistvat suhtumist mõnesse võimalikku keelevääratusse ning on tänulik, kui tähelepanelikud kasutajad informeerivad kõikidest ebatäpsustest elektronposti aadressil helmo.kaerdi@sisekaitse.ee.

1. FUNKTSIOONID

1.1. FUNKTSIOONI MÕISTE, MÄÄRAMISPIIRKOND JA ESITUSVIISID

Definitsioon 1.1. Kui igale reaalarvule x piirkonnast X on üheselt vastavusse seatud reaalarv y , siis öeldakse, et y on muutuja x **funktsioon**.

Reaalarvu x nimetatakse **argumendiks** ehk sõltumatuks muutujaks. Argumendi x muutumispiirkonda X nimetatakse **funktsiooni määramispiirkonnaks**. Funktsiooni y väärtused, mis vastavad kõigile argumendi x väärtustele määramispiirkonnas X moodustavad **funktsiooni muutumispiirkonna** ehk väärtuste hulga Y . Asjaolu, et y on argumendi x funktsioon, märgitakse sümboliga $y = f(x)$. Siin f tähendab eeskirja, mille järgi saadakse argumendi x väärtustele vastav funktsiooni väärtus y .

Juhis 1.1. Kui funktsiooni $f(x)$ määramispiirkond X ei ole ette antud, siis loetakse sinna kuuluvateks kõik need argumendi x väärtused, mille korral vastavus $y = f(x)$ omab mõtet, s.t mille puhul avaldisel $f(x)$ on kindel reaalarvuline väärtus.

Näide 1.1. Leida funktsiooni $y = \sqrt{5-2x}$ määramispiirkond X ja muutumispiirkond Y .

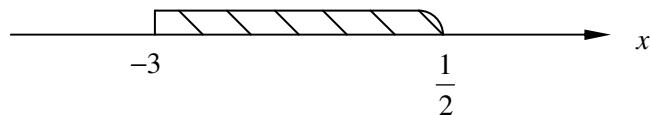
Ruutjuure alune avaldis peab olema mittenegatiivne $5-2x \geq 0$, millest $x \leq 2,5$. Seega määramispiirkond on $X = (-\infty; 2,5]$. Muutumispiirkond on $Y = [0; \infty)$.

Näide 1.2. Leida funktsiooni $y = \log(1-2x) + \sqrt{x+3}$ määramispiirkond.

Lähtume juhisest 1.1. Kuna logaritmid on vaid positiivsetel arvudel ja ruutjuure alune avaldis peab olema mittenegatiivne, siis saab määramispiirkonna leida võrratuste süsteemist

$$\begin{cases} 1-2x > 0, \\ x+3 \geq 0, \end{cases}$$

millest $x < \frac{1}{2}$ ja $x \geq -3$, mis kokkuvõetuna annavad määramispiirkonnaks $X = \left[-3; \frac{1}{2}\right)$. Tulemust piltlikustab joonisel 1.1 toodud skeem, kus määramispiirkond on viirutatud ning piirkonda kuuluva punkti $x = 3$ kohal on sümboolselt täisnurk ja sealt välja jääva punkti kohal $x = \frac{1}{2}$ on kaar.



Joonis 1.1. Funktsiooni $y = \log(1-2x) + \sqrt{x+3}$ määramispiirkond

Näide 1.3. Leida funktsiooni $y = \sqrt{3-2\log_4 x}$ määramispiirkond.

Vastavalt juhisele 1.1 tuleb üheaegselt täita kaks tingimust

$$\begin{cases} x > 0, \\ 3-2\log_4 x \geq 0. \end{cases}$$

Teine tingimus annab $\log_4 x \leq \frac{3}{2}$, millest $x \leq 4^{\frac{3}{2}}$ ehk $x \leq 8$. Määramispiirkond on niisiis $X = (0; 8]$.

Funktsiooni võib esitada:

1) analüütiliselt

a) ilmutatud kujul valemiga $y = f(x)$ või sageli avaldisena kujul $f(x)$;

b) ilmutamata kujul võrrandiga $F(x, y) = 0$ (tingimusel, et sellel võrrandil on parajasti üks lahend);

c) parameetrisel kujul
$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases}$$

kus muutujate x ja y väärtused on esitatud abimuutuja t funktsioonide väärtustena;

2) numbriliselt tabeli kujul;

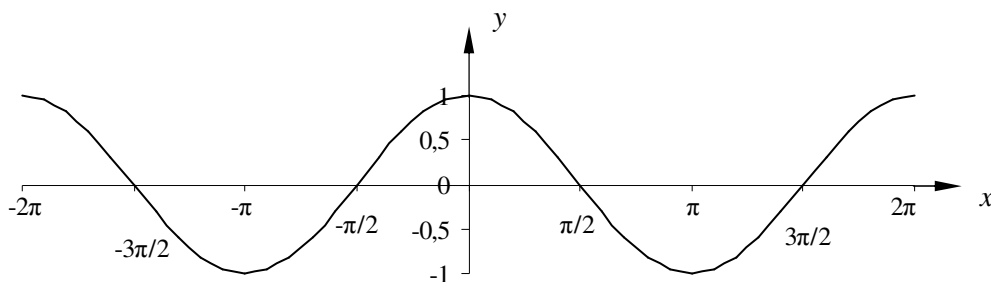
3) geomeetriselt graafiku kujul.

1.2. PAARIS-, PAARITU JA PERIOODILINE FUNKTSIOON

Definitsioon 1.2. Niisugust funktsiooni, mis rahuldab tingimust $f(-x) = f(x)$ iga x puhul määramispiirkonnas X , nimetatakse **paarisfunktsiooniks**.

Paarisfunktsiooni graafik on sümmeetriline y -telje suhtes.

Kuna $\cos(-x) = \cos x$, siis $y = \cos x$ on paarisfunktsioon, vt joonist 1.2.

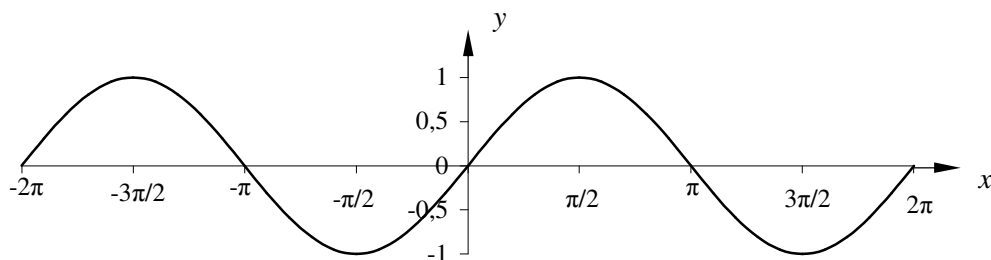


Joonis 1.2. Funktsiooni $y = \cos x$ graafik

Definitsioon 1.3. Niisugust funktsiooni, mis rahuldab tingimust $f(-x) = -f(x)$ iga x puhul määramispiirkonnas X , nimetatakse **paarituks funktsiooniks**.

Paaritu funktsiooni graafik on sümmeetriline koordinaatide alguspunkti suhtes.

Kuna $\sin(-x) = -\sin x$, siis $y = \sin x$ on paaritu funktsioon, vt joonist 1.3.



Joonis 1.3. Funktsiooni $y = \sin x$ graafik

Näide 1.4. Uurida, kas funktsioon $f(x) = \frac{\sin x^2}{x^2 - 1}$ on paaris- või paaritu funktsioon?

Moodustame $f(-x) = \frac{\sin(-x)^2}{(-x)^2 - 1} = \frac{\sin x^2}{x^2 - 1} = f(x)$. Kuna $f(-x) = f(x)$, siis on tegemist paarisfunktsiooniga.

Näide 1.5. Uurida, kas funktsioon $f(x) = \sqrt{1+x+x^2} - \sqrt{1-x+x^2}$ on paaris- või paaritu funktsioon?

Moodustame $f(-x) = \sqrt{1-x+x^2} - \sqrt{1+x+x^2} = -(\sqrt{1+x+x^2} - \sqrt{1-x+x^2}) = -f(x)$. Kuna tulemusest on näha, et $f(-x) = -f(x)$, siis funktsioon on paaritu.

Näide 1.6. Uurida, kas funktsioon $f(x) = \sin x - \cos x$ on paaris- või paaritu funktsioon?

Moodustame $f(-x) = \sin(-x) - \cos(-x) = -\sin x - \cos x \neq f(x) \neq -f(x)$.

Näeme, et funktsioon pole ei paaris ega paaritu.

Definitsioon 1.4. Niisugust funktsiooni, mis rahuldab tingimust $f(x + \omega) = f(x)$, $\omega \neq 0$, iga x ja $x + \omega$ puhul, nimetatakse **perioodiliseks funktsiooniks**, arvu ω aga funktsiooni $f(x)$ perioodiks.

Perioodilise funktsiooni graafik on määratud, kui on teada selle graafiku osa ühe perioodi pikkuses poollõigis $[x_0, x_0 + \omega)$. Ülejäänu saadakse selle tüki nihutamisega piki x -telge ühes või teises suunas perioodi kordselt.

Näiteks funktsioonide $y = \sin x$ ja $y = \cos x$ periood on $\omega = 2\pi$, funktsioonide $y = \tan x$ ja $y = \cot x$ periood on $\omega = \pi$.

1.3. MONOTOONSED FUNKTSIOONID. PÖÖRDFUNKTSIOON

Kuulugu x_1 ja x_2 piirkonda X ($x_1 \in X$, $x_2 \in X$) ning olgu $x_2 > x_1$.

Definitsioon 1.5. Funktsioon $f(x)$ on piirkonnas X **monotoonne**, kui vahe $f(x_2) - f(x_1)$ säilitab märki. Kui $f(x_2) - f(x_1) \geq 0$, siis on $f(x)$ **monotoonselt kasvav**. Kui $f(x_2) - f(x_1) \leq 0$, siis on $f(x)$ **monotoonselt kahanev**.

Kui definitsiooni 1.5 kirjutada ranged võrratused, siis räägitakse rangelt monotoonsetest funktsioonidest.

Definitsioon 1.6. Avaldades võrrandist $y = f(x)$ argumendi x , saadakse esialgse funktsiooni $y = f(x)$ **pöördfunktsioon** $x = \varphi(y)$.

Pöördfunktsiooni tähistatakse ka kujul $x = f^{-1}(y)$.

Märkus 1.1. Pöördfunktsiooni $x = \varphi(y)$ määramispiirkonnaks on funktsiooni $y = f(x)$ muutumispiirkond Y ja muutumispiirkonnaks on funktsiooni $y = f(x)$ määramispiirkond X . Iga rangelt monotoonse funktsiooni pöördfunktsioon on ühene ja samuti rangelt monotoonne, kusjuures kasvava funktsiooni pöördfunktsioon on kasvav, kahaneva funktsiooni pöördfunktsioon aga kahanev.

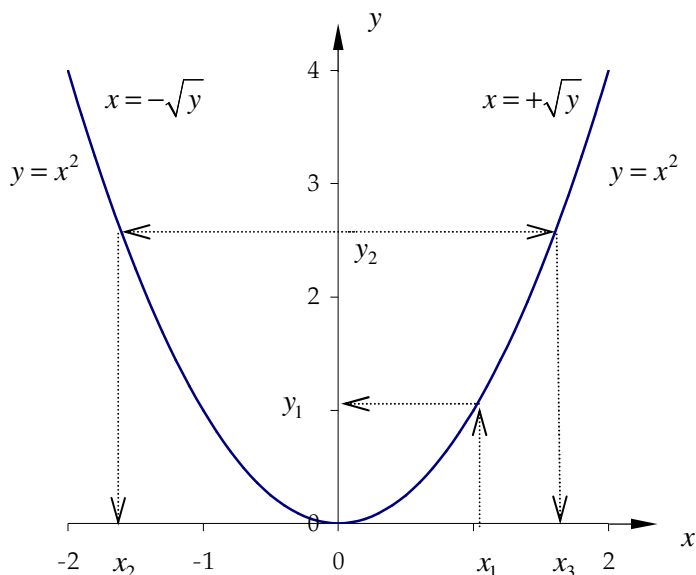
Näide 1.7. Leida funktsiooni $y = x^3$ pöördfunktsioon.

Avaldame argumendi x ja saame esialgse funktsiooni pöördfunktsiooni $x = \sqrt[3]{y}$, kusjuures see pöördfunktsioon on ühene (igale y väärtusele vastab üks x väärtus).

Näide 1.8. Leida funktsiooni $y = x^2$ pöördfunktsioon.

Funktsiooni $y = x^2$ määramispiirkond on $X = (-\infty; \infty)$ ja muutumispiirkond on $Y = [0; \infty)$.

Võtame joonisel 1.4 funktsiooni $y = x^2$ argumendi ühe väärtuse x_1 ja näeme, et sellele vastab üksainus funktsiooni väärtus y_1 . Seega on $y = x^2$ ühene funktsioon. Avaldame võrrandist $y = x^2$ argumendi x ja saame esialgse funktsiooni pöördfunktsiooni $x = \pm\sqrt{y}$, mis on aga kahene funktsioon. Graafiliselt näeme seda joonisel 1.4, kui võtame pöördfunktsiooni argumendi ühe väärtuse y_2 , millele vastab kaks pöördfunktsiooni väärtust x_2 ja x_3 . Ühesed pöördfunktsioonid saame funktsiooni $y = x^2$ määramispiirkonna osadel $X_1 = (-\infty; 0]$ ja $X_2 = [0; \infty)$, vastavalt $x = -\sqrt{y}$ ja $x = +\sqrt{y}$.



Joonis 1.4. Funktsioon $y = x^2$ ja tema pöördfunktsioon

Näide 1.9. Leida funktsiooni $y = 1 + \log(x - 2)$ pöördfunktsioon.

Peame silmas, et kui $\log_a x = y$, siis $x = a^y$.

Avaldame $\log(x - 2) = y - 1$ ja seejärel leiame $x - 2 = 10^{y-1}$, millest saame pöördfunktsiooni $x = 10^{y-1} + 2$.

Esialgse funktsiooni määramispiirkonna leiame võrratusest $x - 2 > 0$ ehk $x > 2$ või teises sümboolikas $X = (2; \infty)$. Seejuures esialgse funktsiooni muutumispiirkond on $Y = (-\infty; \infty)$.

Märkuse 1.1 kohaselt on pöördfunktsiooni $x = 10^{y-1} + 2$ määramispiirkond $Y = (-\infty; \infty)$ ja muutumispiirkond $X = (2; \infty)$.

1.4. LIITFUNKTSIOON

Kui y on muutuja u funktsioon, u aga omakorda sõltub muutujast x , siis ka y sõltub muutujast x . Olgu $y = F(u)$ ja $u = \varphi(x)$. Seega y on ühtlasi muutuja x funktsioon: $y = F[\varphi(x)]$. Viimast funktsiooni nimetatakse **liitfunktsiooniks** (funktsiooni funktsiooniks). Funktsioonid $F(u)$ ja $\varphi(x)$ on liitfunktsiooni $F[\varphi(x)]$ koostisosad. Liitfunktsiooni puhul pole muutuja y määratud argumenti x kaudu otseselt, vaid vahepealse muutuja u kaudu. Näiteks $y = \sin \sqrt{x}$ on liitfunktsioon, kusjuures $y = \sin u$ ja $u = \sqrt{x}$.

Liitfunktsioonil võib olla ka rohkem kui kaks koostisosa, näiteks $y = \sin^2(1 + \sqrt{2x})$.

1.5. ARKUSFUNKTSIOONID

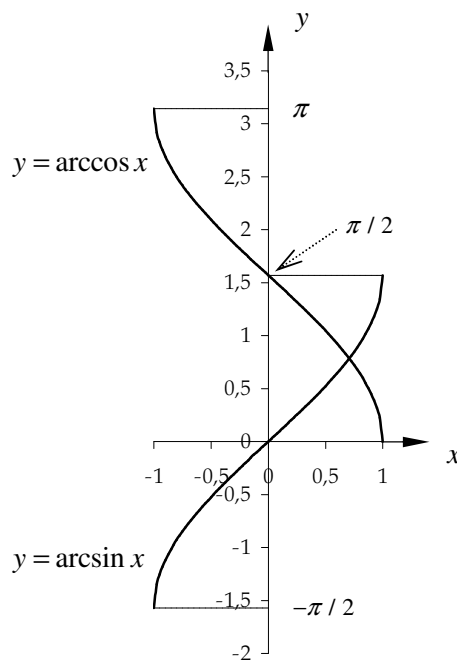
Trigonomeetriliste funktsioonide pöördfunktsioone nimetatakse **arkusfunktsioonideks**. Nad on lõpmata mitmesed funktsioonid, kuid tavaliselt kasutatakse nende üheseid peaharusid, mis vastavad trigonomeetriliste funktsioonide määramispiirkondade teatavatele alamhulkadele.

Vaatleme funktsiooni $y = \sin x$ lõigus $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, kus siinusfunktsioon on kasvav. Tema pöördfunktsioon arkussinus $x = \arcsin y$ on siis ühene ja samuti kasvav. Vahtades viimases omavahel x ja y , saadakse arkussinus, kus argument on tähistatud x -tähega: $y = \arcsin x$.

Funktsiooni $y = \arcsin x$ määramispiirkond on $X = [-1; 1]$ ja muutumispiirkond on $Y = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Funktsiooni $y = \arccos x$ määramispiirkond on $X = [-1; 1]$ ja muutumispiirkond on $Y = [0; \pi]$.

Funktsioonide $y = \arcsin x$ ja $y = \arccos x$ graafikud on joonisel 1.5.

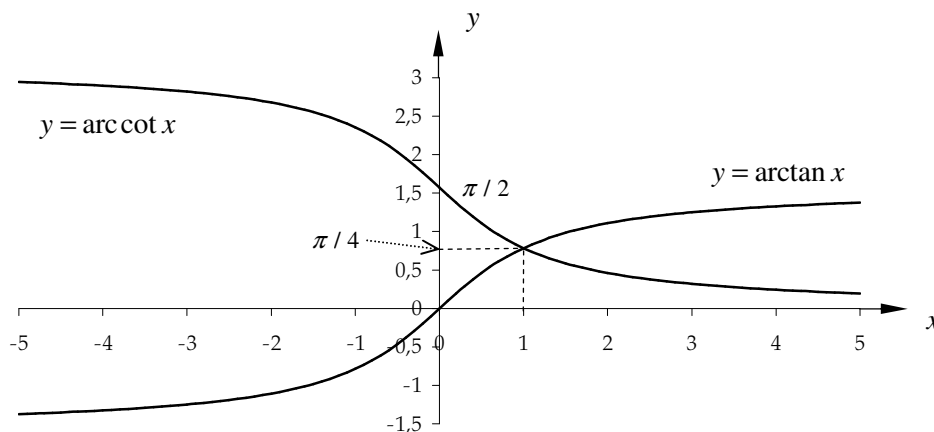


Joonis 1.5. Funktsioonide $y = \arcsin x$ ja $y = \arccos x$ graafikud

Funktsiooni $y = \arctan x$ määramispiirkond on $X = (-\infty; \infty)$ ja muutumispiirkond on $Y = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Funktsiooni $y = \operatorname{arccot} x$ määramispiirkond on $X = (-\infty; \infty)$ ja muutumispiirkond on $Y = (0; \pi)$.

Funktsioonide $y = \arctan x$ ja $y = \operatorname{arccot} x$ graafikud on joonisel 1.6.



Joonis 1.6. Funktsioonide $y = \arctan x$ ja $y = \operatorname{arccot} x$ graafikud

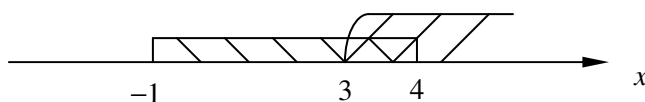
Näide 1.10. Leida funktsiooni $y = \frac{x}{\sqrt{x-3}} + \arcsin \frac{3-2x}{5}$ määramispiirkond.

Juhise 1.1 kohaselt tuleb üheaegselt täita kaks tingimust $\begin{cases} x-3 > 0, \\ -1 \leq \frac{3-2x}{5} \leq 1. \end{cases}$

Esimesest tingimusest tuleneb $x > 3$.

Teisest tingimusest saab $-5 \leq 3-2x \leq 5$ ehk $-8 \leq -2x \leq 2$, millest $-1 \leq x \leq 4$.

Mõlemad tingimused koos annavad määramispiirkonnaks $X = (3; 4]$, mida graafiliselt kujutab joonisel 1.7 ristviirutusega piirkond.



Joonis 1.7. Funktsiooni $y = \frac{x}{\sqrt{x-3}} + \arcsin \frac{3-2x}{5}$ määramispiirkond

Näide 1.11. Leida funktsiooni $y = 1 + \arccos(1-x)$ pöördfunktsioon.

Avaldame $\arccos(1-x) = y-1$, millest $1-x = \cos(y-1)$ ja pöördfunktsioon on $x = 1 - \cos(y-1)$. Pöördfunktsiooni määramispiirkonnaks on esialgse funktsiooni muutumispiirkond $Y = [1; 1+\pi]$ ja muutumispiirkonnaks on esialgse funktsiooni määramispiirkond $X = [0; 2]$ (viimane saadakse võrratustest $-1 \leq 1-x \leq 1$), vt märkust 1.1.

1.6. ELEMENTAARFUNKTSIOONID

Põhilisteks elementaarfunktsioonideks nimetatakse järgmisi funktsioone:

1. Konstantne funktsioon $y = c$.
2. Eksponentfunktsioon $y = a^x$, $a > 0$.
3. Logaritmifunktsioon $y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$.
4. Astmefunktsioon $y = x^a$.
5. Trigonomeetrilised funktsioonid $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \tan x$, $y = \cot x$.
6. Arkusfunktsioonid $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \arctan x$, $y = \operatorname{arc cot} x$.

Funktsioone, mis saadakse põhilistest elementaarfunktsioonidest lõpliku arvu aritmeetiliste tehete ja liitfunktsiooni moodustamise teel, nimetatakse **elementaarfunktsioonideks**.

1.7. MATEMAATIKAFUNKTSIOONID, VALEMID JA GRAAFIKUD EXCELIS

Tänapäeva infotehnoloogiavahendid ja tarkvara hõlbustavad mitmete matemaatika valdkonda kuuluvate probleemide lahendamist ja samuti tulemuste presenteerimist. Esile võib tuua kolm kasutusvaldkonda: 1) arvutamine, 2) joonestamine ja 3) trükkimine.

Spetsialiseeritud matemaatikapaketid, näiteks *MATHEMATICA*, *MATHCAD*, *MATLAB* jne on väga avarate võimalustega, kuid samas on nende litsentsid küllalt kallid, mistõttu nimetatud paketid ei tarvitse olla kättesaadavad. Seetõttu juhitakse käesolevas õppevahendis tähelepanu vaid enam-vähem üldkättesaadava paketi *MS Office* mõnede võimalustele. Kuigivõrd komplitseerib käsitelu asjaolu, et hetkel on paralleelselt kasutusel mitu *Office* versiooni, eelkõige *Office 2003* ja *2007*.

Office tabelarvutuspakett *Excel* sisaldab hulgaliselt **matemaatikafunktsioone** (õppevahendi autori poolt kasutadaolevas *Excel 2003* versioonis on 66 ning *Excel 2007* versioonis 60 matemaatikafunktsiooni), mis mõlema *Exceli* versiooni korral avanevad funktsioonireal (*Formula Bar*) ikooni f_x (*Insert Function*) pressides ning valides pakutavatest funktsioonide kategooriatest *Math & Trig*.

Excelis vormistatav **valem** peab algama võrdusmärgiga ja esitatakse kujul **=avaldis**. Pärast valemi trükkimist ja reavahetuse klahvile vajutamist arvutab *Excel* avaldise väärtuse ja salvestab selle samasse lahtrisse, millesse sisestati valem. Kui see lahter nüüd märgistada hiirega, siis võib sisestatud ja arvutamiseks kasutatud valemi struktuuri vaadata funktsioonireal (*Formula Bar*).

Jagamismärgiks on kaldkriips / ja korrutamismärgiks on tärn *. Astmenäitaja ette trükitakse sümbol ^ . Tehete järjekorra määramiseks ja funktsiooni argumentide piiramiseks kasutatakse ümarsulge. Järgnevas *Exceli* grammatikat tutvustavates näidetes (1.1) ja (1.2) on argumentide ja parameetrite tähistena säilitatud sümbolid (a, b, \dots, x, \dots). Praktikas asenduvad need sümbolid (enamasti) lahtrite aadressidega, kuhu on varem salvestatud vastavate argumentide ja parameetrite arvulised väärtused (või kus need väärtused on mõne teise valemiga arvutatud).

$$(x+z)^3 + \sqrt{a+b} - \sqrt[3]{c-d} + \frac{m-n}{a+b} \leftrightarrow (x+z)^3 + \operatorname{SQRT}(a+b) - (c-d)^{(1/3)} + (m-n)/(a+b) \quad (1.1)$$

$$\sin(\pi x) - \cos^2 y + e^{2z} - \ln a + \log b \leftrightarrow \operatorname{SIN}(\operatorname{PI}(x)) - (\operatorname{COS}(y))^2 + \operatorname{EXP}(2*x) - \operatorname{LN}(a) + \operatorname{LOG10}(b) \quad (1.2)$$

Graafikute joonestamiseks *Excel 2003* vahenditega tuleb standardsest nupureast valida tulpdiaigrammi kujuline ikoon (*Chart Wizard*). Funktsiooni $y = f(x)$ graafiku joonestamiseks sobib valik *XY (Scatter)*. *Excel 2007* puhul tuleb menüüreast valida *Insert* ning vajalik *XY (Scatter)* sisaldub loetelus *Chart* (ikoon *Scatter* on pärast valikut *Insert* enamasti kohe nähtav).

Valemite ja matemaatiliste sümbolite trükkimise tehnika on *Office 2003* ja *2007* puhul oluliselt erinev. *Office 2003* jõuab vastava redaktorini käsureaga *Insert / Object / Microsoft Equation 3.0*. Käesoleva õppevahendi vormistamisel on eelnimetatud redaktori asemel kasutatud spetsialiseeritud programmi *MathType6*. *Office 2007* valemite programm käivitub käsureaga *Insert / Equation / Insert New Equation*.

2. FUNKTSIOONI PIIRVÄÄRTUS JA PIDEVUS

2.1. FUNKTSIOONI PIIRVÄÄRTUSE MÕISTE

Vaatleme funktsiooni $f(x)$, mille argument x läheneb tõkestamatult mingile arvule a . Tähistame selle protsessi lühidalt kujul $x \rightarrow a$. Argument x võib erineda arvust a kuitahes vähe, aga võrdus $x = a$ on välistatud. Võib juhtuda, et kui $x \rightarrow a$, siis funktsiooni $f(x)$ väärtused lähenevad omakorda mingile teisele arvule b , s.t $f(x) \rightarrow b$. Lühidalt, kui $x \rightarrow a$, siis $f(x) \rightarrow b$.

Piltlikult öeldakse, et arv b on funktsiooni $f(x)$ piirväärtus kohal a , kui funktsiooni $f(x)$ väärtused tulevad arvule b kuitahes lähedale, kui aga argumenti x väärtused on arvule a küllalt lähedal.

Definitsioon 2.1. Arvu b nimetatakse funktsiooni $f(x)$ piirväärtuseks kohal a , kui vastavalt igale kuitahes väikesele positiivsele arvule ε leidub niisugune positiivne arv δ , et kehtib võrratus $|f(x) - b| < \varepsilon$, niipea kui $|x - a| < \delta$, $x \neq a$. Siinjuures δ on ε -i funktsioon: $\delta = \delta(\varepsilon)$.

Funktsiooni $f(x)$ piirväärtust kohal (punktis) a tähistatakse $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$.

Märkus 2.1. Sümbol \forall tähendab „iga“. Näiteks $\forall x > 0$ loetakse „iga positiivne x “. Sümbol \exists tähendab „leidub“. Näiteks $\exists \delta > 0$ loetakse „leidub positiivne δ “. Sümboleid \forall ja \exists võib kasutada definitsiooni 2.1 formuleeringu lühendamiseks.

Märkus 2.2. Argument x võib läheneda ka lõpmatusse: $x \rightarrow +\infty$ või $x \rightarrow -\infty$.

Definitsioon 2.2. Kui x omandab ainult arvust a suuremaid väärtusi, siis kirjutatakse, et $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = b_1$ ja arvu b_1 nimetatakse funktsiooni $f(x)$ parempoolseks piirväärtuseks kohal a . Analoogiliselt defineeritakse vasakpoolne piirväärtus $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = b_2$.

Definitsioon 2.3. Kui $f(x)$ läheneb kohal a lõpmatusse, s.t $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$, siis öeldakse, et $f(x)$ on kohal a lõpmatult kasvav suurus.

2.2. LÕPMATULT KAHANEVAD SUURUSED

Definitsioon 2.4. Funktsiooni $\alpha(x)$ nimetatakse lõpmatult kahanevaks suuruseks (ehk lõpmata väikeseks suuruseks) antud piirprotsessis, kui selles protsessis $\lim \alpha(x) = 0$.

Teoreem 2.1. Kui funktsioonil $f(x)$ on teatavas piirprotsessis olemas piirväärtus, s.t kui $\lim f(x) = b$, siis $f(x) = b + \alpha$, kus $\alpha = \alpha(x)$ on lõpmatult kahanev suurus.

Teoreem 2.2. (Teoreemi 2.1 pöördteoreem) Kui $f(x) = b + \alpha$, siis $\lim f(x) = b$.

Teoreem 2.3. Lõpmatult kahaneva suuruse pöördväärtus $\frac{1}{\alpha}$ on lõpmatult kasvav suurus.

Teoreem 2.4. Lõpmatult kasvava suuruse pöördväärtus on lõpmatult kahanev suurus.

Teoreem 2.5. Kahe lõpmatult kahaneva suuruse summa, vahe ja korrutis on lõpmatult kahanevad suurused.

Märkus 2.3. Kahe lõpmatult kahaneva suuruse jagatis ei tarvitse olla lõpmatult kahanev. Seda küsimust on detailsemalt vaadeldud punktis 2.4.

2.3. TEHETEGA SEOTUD PIIRVÄÄRTUSTE OMADUSED

Summa (vahe) piirväärtus võrdub piirväärtuste summaga (vahega):

$$\lim[f(x) \pm g(x)] = \lim f(x) \pm \lim g(x). \quad (2.1)$$

Korrutise piirväärtus võrdub piirväärtuste korrutisega:

$$\lim[f(x) \cdot g(x)] = \lim f(x) \cdot \lim g(x). \quad (2.2)$$

Konstantse teguri c võib tuua piirväärtuse sümboli alt piirväärtuse sümboli ette:

$$\lim[c \cdot g(x)] = c \cdot \lim g(x). \quad (2.3)$$

Jagatise piirväärtus võrdub piirväärtuste jagatisega:

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)}. \quad (2.4)$$

Märkus 2.4. Kui piirväärtuse vahetul arutamisel tekib määramatus (näiteks $\frac{\infty}{\infty}$ või $\frac{0}{0}$), siis tuleb avaldist eelnevalt teisendada. Vaatleme järgnevas kolme ülesannete klassi.

1. Avaldise lugejas ja nimetajas on polünoomid (x astmed ja konstandid), argument $x \rightarrow \infty$ ja tegemist on määramatusega $\frac{\infty}{\infty}$. Sellisel juhul jagatakse nii lugejas kui nimetajas kõik liidetavad argumendi x kõige kõrgema astmega (vt näiteid 2.1, 2.2 ja 2.3).
2. Avaldise lugejas ja nimetajas on polünoomid (x astmed ja konstandid), argument x läheneb mingile lõplikule arvule a ($x \rightarrow a$) ja tegemist on määramatusega $\frac{0}{0}$. Niisugusel juhul lahutatakse lugeja ja nimetaja teguriteks, kusjuures nii lugejas kui nimetajas on oodata teguri $x - a$ eraldumist, mis ongi määramatuse $\frac{0}{0}$ tekkimise allikaks (vt näiteid 2.4 ja 2.5).
3. Avaldise lugejas või/ja nimetajas on juured, argument x läheneb mingile lõplikule arvule a ($x \rightarrow a$) ja tegemist on määramatusega $\frac{0}{0}$. Määramatusest lahtisaamiseks teisendatakse lugejas olev ruutjuur nimetajasse või/ja nimetajas olev ruutjuur lugejasse (tehnilisi üksikasju vt näidetes 2.6 ja 2.7).

Märkus 2.5. Süstemaatiline eeskiri (L'Hospitali reegel) määramatustega seotud piirväärtuste arutamiseks antakse funktsiooni tuletise rakenduste juures punktis 4.2.

Näide 2.1. Leida piirväärtus $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+1)^2}{2x^2+1}$.

Kuna tegemist on määramatusega $\frac{\infty}{\infty}$, siis jagame lugejas ja nimetajas kõik liidetavad x^2 -ga ning arvestades, et $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x} = 0$ ja $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} = 0$, saame:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+1)^2}{2x^2+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+2x+1}{2x^2+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2}{x^2} + \frac{2x}{x^2} + \frac{1}{x^2}}{\frac{2x^2}{x^2} + \frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}}{2 + \frac{1}{x^2}} = \frac{1}{2}.$$

Näide 2.2. Leida piirväärtus $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - x + 3}{x^3 - 8x + 5}$.

Kuna ülesandes on määramatus $\frac{\infty}{\infty}$, siis jagame lugejas ja nimetajas kõik liidetavad x^3 -ga:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - x + 3}{x^3 - 8x + 5} = \lim_{\left(\frac{\infty}{\infty}\right) x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2x^2}{x^3} - \frac{x}{x^3} + \frac{3}{x^3}}{\frac{x^3}{x^3} - \frac{8x}{x^3} + \frac{5}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{3}{x^3}}{1 - \frac{8}{x^2} + \frac{5}{x^3}} = 0.$$

Viimases piirväärtuses läheneb lugeja nullile ning nimetaja ühele, mistõttu vastuseks on null.

Näide 2.3. Leida piirväärtus $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 5x + 1}{3x + 7}$.

Tegemist on määramatusega $\frac{\infty}{\infty}$, mistõttu jagame lugejas ja nimetajas kõik liidetavad x^2 -ga:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 5x + 1}{3x + 7} = \lim_{\left(\frac{\infty}{\infty}\right) x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2}{x^2} - \frac{5x}{x^2} + \frac{1}{x^2}}{\frac{3x}{x^2} + \frac{7}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2}}{\frac{3}{x} + \frac{7}{x^2}} = \infty.$$

Eelnevas piirväärtuses läheneb lugeja ühele ning nimetaja nullile, mis annab tulemuseks lõpmatuse.

Näide 2.4. Leida piirväärtus $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 5x + 6}$.

Siin on määramatus $\frac{0}{0}$, millest lahutamine lahutame lugeja ja nimetaja teguriteks. Kuna $x \rightarrow 2$, siis on oodata nii lugejas kui ka nimetajas teguri $x - 2$ eraldumist.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 5x + 6} = \lim_{\left(\frac{0}{0}\right) x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+2}{x-3} = \frac{2+2}{2-3} = -4.$$

Näide 2.5. Leida piirväärtus $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{x^2 - x - 20}{2x^2 + 9x + 4}$.

Kuna on määramatus $\frac{0}{0}$, siis lahutame lugeja ja nimetaja teguriteks. Et $x \rightarrow -4$, siis on oodata nii lugejas kui ka nimetajas teguri $x + 4$ eraldumist.

$$\lim_{x \rightarrow -4} \frac{x^2 - x - 20}{2x^2 + 9x + 4} = \lim_{\left(\frac{0}{0}\right) x \rightarrow -4} \frac{(x+4)(x-5)}{2(x+4)(x+0,5)} = \lim_{x \rightarrow -4} \frac{x-5}{2(x+0,5)} = \frac{9}{7}.$$

Näide 2.6. Leida piirväärtus $\lim_{x \rightarrow 10} \frac{\sqrt{x-1} - 3}{x-10}$.

Ülesanne sisaldab (ruut)juurt ja tegemist on määramatusega $\frac{0}{0}$. Seetõttu teisendame lugejas oleva ruutjuure nimetajasse, korrutades nii lugejat kui ka nimetajat teguriga $\sqrt{x-1} + 3$.

$$\lim_{x \rightarrow 10} \frac{\sqrt{x-1} - 3}{x-10} = \lim_{\left(\frac{0}{0}\right) x \rightarrow 10} \frac{(\sqrt{x-1} - 3)(\sqrt{x-1} + 3)}{(x-10)(\sqrt{x-1} + 3)} = \lim_{x \rightarrow 10} \frac{(x-1) - 9}{(x-10)(\sqrt{x-1} + 3)} = \lim_{x \rightarrow 10} \frac{1}{\sqrt{x-1} + 3} = \frac{1}{6}.$$

Näide 2.7. Leida piirväärtus $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{3 - \sqrt{5+x}}{1 - \sqrt{5-x}}$.

Kuna ülesandes esinevad (ruut)juured ja määramatuse liik on $\frac{0}{0}$, siis toimime vastavalt märkuse 2.4 punktis 3 toodud juhistele. Teisendame lugejas oleva ruutjuure nimetajasse, korrutades nii lugejat kui ka nimetajat teguriga $3 + \sqrt{5+x}$ ning teisendame nimetajas oleva ruutjuure lugejasse, korrutades nimetajat ja lugejat teguriga $1 + \sqrt{5-x}$.

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{3 - \sqrt{5+x}}{1 - \sqrt{5-x}} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(3 - \sqrt{5+x})(3 + \sqrt{5+x})(1 + \sqrt{5-x})}{(1 - \sqrt{5-x})(3 + \sqrt{5+x})(1 + \sqrt{5-x})} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{[9 - (5+x)](1 + \sqrt{5-x})}{[1 - (5-x)](3 + \sqrt{5+x})} = -\lim_{x \rightarrow 4} \frac{1 + \sqrt{5-x}}{3 + \sqrt{5+x}} = -\frac{1}{3}.$$

2.4. LÕPMATULT KAHANEVATE SUURUSTE VÕRDLEMINE

Olgu $\alpha = \alpha(x)$ ja $\beta = \beta(x)$ lõpmatult kahanevad suurused mingis piirprotsessis.

Definitsioon 2.5. Kui $\lim \frac{\alpha}{\beta} = 0$, siis α on kõrgemat järku lõpmatult kahanev suurus β suhtes (mida tähistatakse ka kujul $\alpha = o[\beta]$).

Definitsioon 2.6. Kui $\lim \frac{\alpha}{\beta} \neq 0 \neq \infty$, siis α ja β on sama järku lõpmatult kahanevad suurused.

Definitsioon 2.7. Kui mingi $k > 0$ korral $\lim \frac{\alpha}{\beta^k} \neq 0 \neq \infty$, siis α on k -järku lõpmatult kahanev suurus β suhtes.

Definitsioon 2.8. Kui $\lim \frac{\alpha}{\beta} = 1$, siis α ja β on ekvivalentsete lõpmatult kahanevad suurused. Kirjutatakse $\alpha \sim \beta$.

Näide 2.8. On võimalik näidata, et kui $x \rightarrow 0$, siis $\sin x \sim x$ ja $\tan x \sim x$, s.t $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ ja $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$.

Teoreem 2.6. Kui $\alpha \sim \alpha_1$ ja $\beta \sim \beta_1$, siis $\lim \frac{\alpha}{\beta} = \lim \frac{\alpha_1}{\beta_1}$.

Näide 2.9. Arvestades näite 2.8 tulemusi ja teoreemi 2.6, võib veenduda, et $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x}{\tan 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x}{3x} = 2$.

Teoreem 2.7. Kui $\alpha \sim \beta$, siis $\lim \frac{\alpha - \beta}{\alpha} = 0$ ja $\lim \frac{\alpha - \beta}{\beta} = 0$ (ehk $\alpha - \beta = o[\alpha]$ ja $\alpha - \beta = o[\beta]$).

2.5. ARV e . EKSPONENTFUNKTSIOON $y = e^x$. NATURAALLOGARITM $y = \ln x$

Vaatleme jada

$$u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n. \quad (2.5)$$

Kui jadas (2.5) astendaja n kasvab, siis astme alus $1 + \frac{1}{n}$ kahaneb, mis tähendab, et suuruse u_n monotoonsuse (kasvamise või kahanemise) kohta ei saa vahetult midagi öelda. Arvutame jada (2.5) mõned liikmed, selleks et esialgselt hinnata suuruse u_n käitumist juhul, kui astendaja n kasvab:

$$\begin{aligned} u_1 &= 2, \\ u_2 &= 2,25, \\ u_{10} &= (1 + 1/10)^{10} \approx 2,594, \\ u_{100} &\approx 2,705, \\ u_{1000} &\approx 2,717. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Arvutustest (2.6) võib tähele panna, et u_n kasvab, kusjuures kasvamise kiirus aeglustub. Newtoni binoomvalemi abil on võimalik tõestada, et jada (2.5) on

- monotoonselt kasvav ja
- ülalt tõkestatud, kusjuures ülemiseks tõkkeks on arv 3.

Matemaatilises analüüsis on tuntud järgmine teoreem piirväärtuse olemasolu kohta.

Teoreem 2.8. Igal monotoonsel ja tõkestatud suurusel on piirväärtus.

Arvestades käesoleva punkti 2.5 alguses toodud arutelu võib öelda, et kui $n \rightarrow \infty$, siis suurus u_n täidab teoreemi 2.8 eeldusi. See aga tähendab, et kui $n \rightarrow \infty$, siis u_n läheneb mingile arvule, mille märgime tähega e ($u_n \rightarrow e$) ehk kasutades piirväärtuse sümboolikat võime kirjutada

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e. \quad (2.7)$$

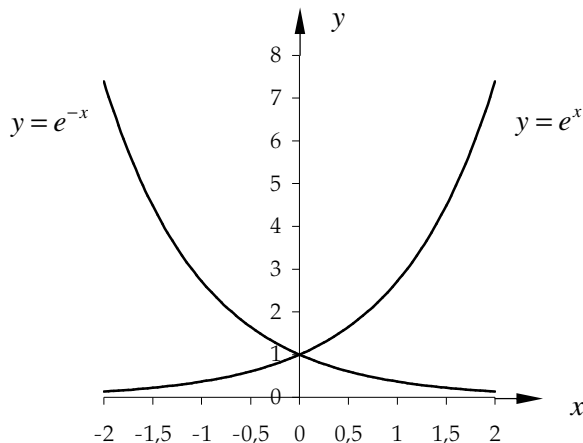
Täpsem analüüs näitab, et piirväärtuses (2.7) võib naturaalarvu n asemel üldisemalt olla reaalarv x , kusjuures x võib läheneda ka miinus lõpmatusele:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e. \quad (2.8)$$

Eelnevast arutelust selgub, et arv e on 2,7 ja 3 vahel: $2,7 < e < 3$. Täpsemad uuringud näitavad, et $e \approx 2,71828$ (e on irratsionaalarv). Käesolevas õppevahendis on e ligikaudne väärtus arvutatud Tayloriga valemi abil (vt punkti 4.10 näite 4.21 valemit (4.33)).

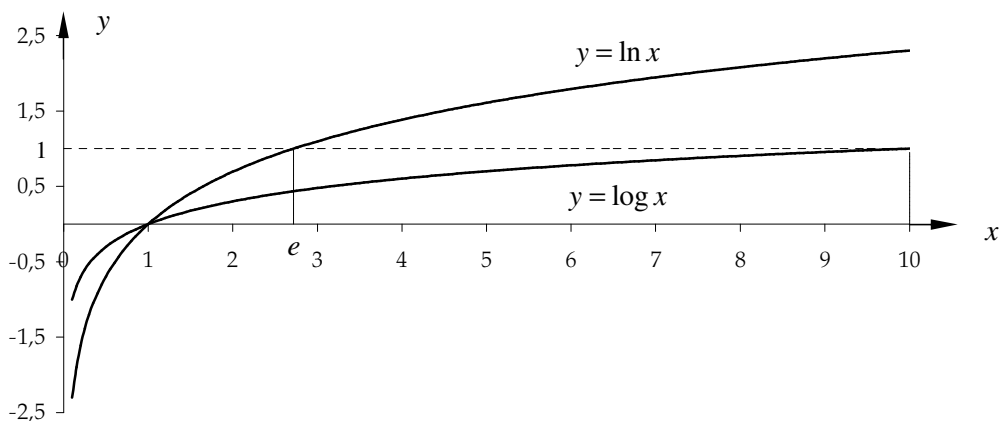
Matemaatilise analüüsi rakendustes kasutatakse laialdaselt **eksponentfunktsiooni** $y = e^x$ ja **naturaallogaritmi** (s.o logaritmi alusel e) $y = \log_e x$, ehk $y = \ln x$, nagu naturaallogaritmi tähistatakse.

Eksponentfunktsiooni $y = e^x$ graafik on joonisel 2.1. Eksponentfunktsioon $y = e^x$ on kiirelt kasvav funktsioon, mis aga joonise 2.1 koordinaattelgedel oleva erineva mõõtkava tõttu ei tarvitse esmapilgul silma hakata. Samal joonisel 2.1 on ühtlasi funktsiooni $y = e^{-x}$ graafik.



Joonis 2.1. Eksponentfunktsioonide $y = e^x$ ja $y = e^{-x}$ graafikud

Joonisel 2.2 on naturaallogaritmi $y = \ln x$ graafik ning võrdluseks ka kümnenndlogaritmi $y = \log x$ graafik.



Joonis 2.2. Naturaallogaritmi $y = \ln x$ ja kümnenndlogaritmi $y = \log x$ graafikud

Märkus 2.6. Mõnedes rakendustes kasutatakse eksponentfunktsioonidest $y = e^x$ ja $y = e^{-x}$ koostatud **hüperboolseid funktsioone**.

Hüperboolne siinus defineeritakse kujul
$$\operatorname{sh}x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Hüperboolne koosinus:
$$\operatorname{ch}x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Hüperboolne tangens:
$$\operatorname{th}x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

Hüperboolne kootangens:
$$\operatorname{cth}x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}.$$

2.6. PIDEVA FUNKTSIOONI MÕISTE

Piltlikult võib öelda, et pideva funktsiooni graafiku võib joonestada pliitsit paberilt eemaldamata.

Definitsioon 2.9. Funktsiooni $f(x)$ nimetatakse pidevaks kohal a , kui

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a). \quad (2.9)$$

Definitsioon 2.10. Funktsiooni $f(x)$ nimetatakse pidevaks piirkonnas X , kui $f(x)$ on pidev piirkonna X igas punktis.

Tingimusele (2.9) võib anda teise kuju (2.10), mis on sageli kasulik rakendustes. Toome $f(a)$ kui konstandi võrdusmärgist vasakule poole piirväärtuse sümboli alla:

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - f(a)] = 0.$$

Märgime argumenti muudu $x - a = \Delta x$, siis $x = a + \Delta x$. Arvestame, et kui $x \rightarrow a$, siis $\Delta x \rightarrow 0$ ja saame

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} [f(a + \Delta x) - f(a)] = 0.$$

Tähistame funktsiooni muudu $f(a + \Delta x) - f(a) = \Delta y$ ja võtame tulemuse kokku järgnevas definitsioonis.

Definitsioon 2.11. Funktsioon on vaadeldaval kohal pidev, kui sellel kohal argumenti muudu Δx lähenemisel nullile ka funktsiooni muut Δy läheneb nullile:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0. \quad (2.10)$$

2.7. KATKEVAD FUNKTSIOONID

Kui $f(x)$ ei ole pidev kohal a , siis punkti a nimetatakse funktsiooni $f(x)$ katkevuspunktiks, funktsiooni $f(x)$ aga katkevaks kohal a .

Funktsioon $f(x)$ on katkev kohal a , kui on täidetud vähemalt üks kolmest järgnevast tingimusest:

- 1) $f(x)$ pole määratud kohal a ;
- 2) funktsioonil $f(x)$ ei ole lõplikku piirväärtust kohal a ;
- 3) tingimus (2.9) ei ole täidetud, s.t $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq f(a)$.

Katkevuspunktid jagatakse kahte liiki.

1. **Esimest liiki** katkevuspunktis a on olemas ühepoolsed piirväärtused

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \text{ ja } \lim_{x \rightarrow a^-} f(x).$$

- a) Funktsioonil $f(x)$ on kohal a **hüpe**, kui need ühepoolsed piirväärtused on erinevad: $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$. Hüppe suurus on

$$h = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) - \lim_{x \rightarrow a^-} f(x). \quad (2.11)$$

- b) Kui hüpe $h=0$, siis on tegemist **kõrvaldatava katkevusega**. Katkevuse saab kõrvaldada, kui defineerida täiendavalt funktsiooni väärtus kohal a tingimusega

$$f(a) = \lim_{x \rightarrow a} f(x).$$

2. Kõik ülejäänud katkevused, kus vähemalt üks ühepoolsetest piirväärtustest annab tulemuseks kas $+\infty$ või $-\infty$, on **teist liiki**.

Näide 2.10. Leida funktsiooni $f(x) = \frac{x}{|x|}$ katkevuspunktid ja uurida funktsiooni käitumist katkevuspunktide ümbruses.

Kuna funktsioon $f(x)$ pole määratud kohal $x=0$, siis on sellel kohal $x=0$ katkevus, mis on ka ainus katkevuspunkt.

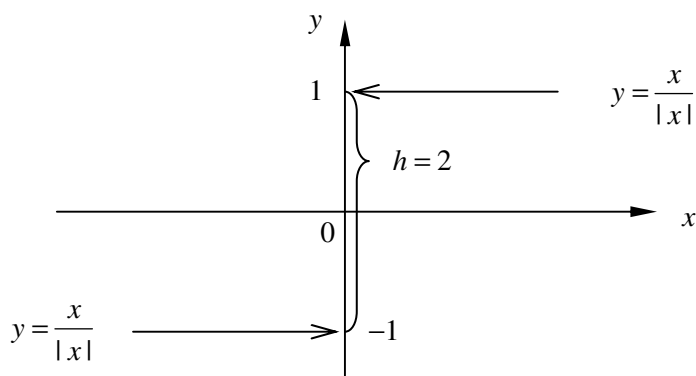
Peame silmas, et absoluutväärtus on defineeritud kujul $|x| = \begin{cases} x, & \text{kui } x \geq 0, \\ -x, & \text{kui } x < 0, \end{cases}$ ning arvutame ühepoolsed piirväärtused katkevuspunktis:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{|x|} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{-x} = -1 \quad \text{ja} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{|x|} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = 1.$$

Kui nullile läheneda vasakult, s.o kui $x \rightarrow 0^-$, siis $x < 0$ ja absoluutväärtuse definitsiooni kohaselt $|x| = -x$. Kui nullile läheneda paremalt, s.o kui $x \rightarrow 0^+$, siis $x > 0$ ja $|x| = x$.

Kuna mõlemad ühepoolsed piirväärtused on katkevuspunktis lõplikud ja erinevad, siis on funktsioonil kohal $x=0$ hüpe. Hüppe suurus on seose (2.11) kohaselt $h = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{|x|} - \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{|x|} = 2$. Hüpe on näidatud

joonisel 2.3 oleval funktsiooni $y = \frac{x}{|x|}$ graafikul.



Joonis 2.3. Funktsiooni $y = \frac{x}{|x|}$ graafik

3. FUNKTSIOONI TULETIS JA DIFERENTSIAAL

3.1. FUNKTSIOONI TULETISE MÕISTE JA INTERPRETATSIOONID

Funktsiooni tuletise mõiste juurde jõudmiseks lähtume mehaanilise liikumise kiirusest ja joone puutuja tõusust.

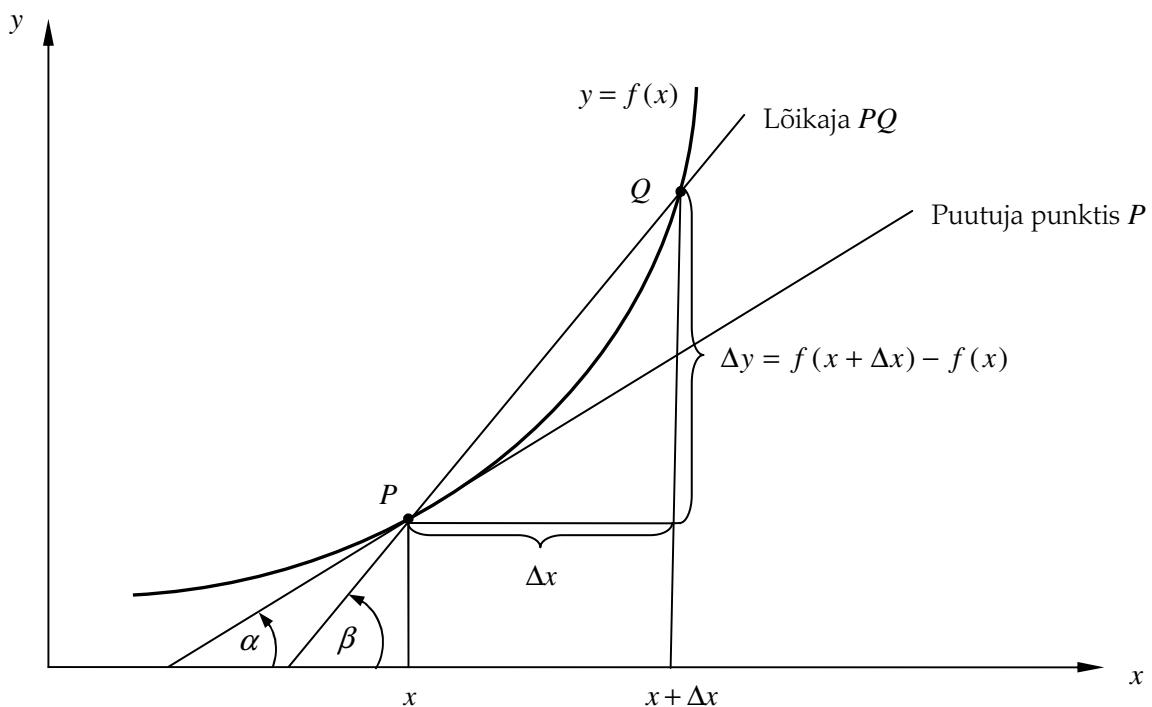
Liikumise kiirus

Vaatleme masspunkti sirgjoonelist liikumist mittekonstantse kiirusega. Teepikkus s on aja t funktsioon $s = f(t)$. Läbitagu teepikkus Δs ajavahemiku Δt jooksul. Suhe $\frac{\Delta s}{\Delta t} = v_k$ on masspunkti liikumise keskkiirus ajavahemiku Δt jooksul. Kui $\Delta t \rightarrow 0$, siis saame hetkkiiruse järgmise piirväärtuse kujul:

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}. \quad (3.1)$$

Joone puutuja tõus

Definitsioon 3.1. Joone puutujaks punktis P nimetatakse lõikaja PQ piirseisu, kui punkt Q mööda kõverat piiramata läheneb punktile P (joonis 3.1).



Joonis 3.1. Joone $y = f(x)$ puutuja punktis P ja lõikaja PQ

Jooniselt 3.1 on näha, et kui $Q \rightarrow P$, siis $\beta \rightarrow \alpha$. Seega võib definitsiooni 3.1 esitada piirväärtusena $\lim_{Q \rightarrow P} \beta = \alpha$. Kuna $Q \rightarrow P$ tähendab, et $\Delta x \rightarrow 0$, siis saame $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \beta = \alpha$. Funktsiooni $\tan x$ pidevuse tõttu võib eelneva piirväärtuse kirjutada kujul $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \tan \beta = \tan \alpha$, kus $\tan \alpha$ on joone $y = f(x)$ puutuja tõus punktis P .

Et $\tan \beta = \frac{\Delta y}{\Delta x}$, vt joonist 3.1, kus $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$, siis puutuja tõus avaldub kujul

$$\tan \alpha = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \tan \beta = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \quad (3.2)$$

Pöörame tähelepanu asjaolule, et piirväärtused (3.1) ja (3.2) on sisult ühesugused, erinedes vaid tähistuse poolest. Taolise piirväärtuse kujul defineeritaksegi funktsiooni tuletis.

Definitsioon 3.2. Funktsiooni $f(x)$ tuletiseks kohal x nimetatakse piirväärtust

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}, \quad (3.3)$$

mida võib tähistada ühega järgmistest sümbolitest: $y' = y'_x = f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{df(x)}{dx}$.

Niisiis võib öelda, et funktsiooni tuletise füüsikaliseks interpretatsiooniks on masspunkti liikumise kiirus (3.1) ning geomeetriliseks interpretatsiooniks on joone puutuja tõus (3.2). Funktsiooni tuletisele on võimalik anda teisigi tõlgendusi, näiteks majanduses on selleks investeeringu tulevikuväärtuse kasvutempo pidevate intresside korral.

Näide 3.1. Leida funktsiooni $y = x^3$ tuletis lähtuvalt definitsioonist 3.2.

Leiame esmalt funktsiooni muudu

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = (x + \Delta x)^3 - x^3 = x^3 + 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - x^3$$

ja arvutame siis tuletise kui piirväärtuse (3.3):

$$y' = (x^3)' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (3x^2 + 3x\Delta x + (\Delta x)^2) = 3x^2. \quad (3.4)$$

Definitsioon 3.3. Kui funktsioonil on antud kohal lõplik tuletis, siis öeldakse, et funktsioon on sellel kohal diferentseeruv.

Teoreem 3.1. Kui funktsioon on diferentseeruv antud kohal, siis funktsioon on pidev sellel kohal.

Tõestuseks tuleb näidata, et $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0$:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \Delta x \right) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta x = f'(x) \cdot 0 = 0.$$

↑
Lõplik vastavalt eeldusele

Teoreemi 3.1. pöördteoreem ei kehti. See tähendab, et iga pidev funktsioon ei tarvitse olla diferentseeruv.

3.2. DIFERENTSEERIMISE PÕHIVALEMID

1. Kui $c = \text{const}$, siis $c' = 0$ (konstandi tuletis võrdub nulliga).
2. $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$; valemid 3 – 5 on valemi 2 erijuhud.
3. $x' = 1$
4. $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$
5. $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
6. $(a^x)' = a^x \ln a$
7. $(e^x)' = e^x$
8. $(\log_\alpha x)' = \frac{1}{x \ln \alpha}$
9. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$
10. $(\sin x)' = \cos x$
11. $(\cos x)' = -\sin x$
12. $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
13. $(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
14. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
15. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
16. $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$
17. $(\text{arc cot } x)' = -\frac{1}{1+x^2}$

Valemid 1 – 17 saadakse kas vahetult tuletise definitsioonist (3.2) või mõnel juhul on see täiendavalt võimalik ka muude võtetega. Järgnevas on punkti 3.4 näites 3.4 selgitatud, kuidas arkussiinuse tuletise valemi 14 võib leida lähtudes pöördfunktsiooni tuletise arvutamise eeskirjast.

3.3. TEHETEGA SEOTUD DIFERENTSEERIMISREEGLID

Teoreem 3.2. Kui on olemas lõplikud tuletised $u' = u'(x)$ ja $v' = v'(x)$, siis kehtivad valemid

$$(u \pm v)' = u' \pm v', \quad (3.5)$$

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v', \quad (3.6)$$

$$(c \cdot u)' = c \cdot u', \text{ kus } c = \text{const}, \quad (3.7)$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}. \quad (3.8)$$

Tõestame valemi (3.8) kehtivuse. Märgime $y = f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} = \frac{u}{v}$ ja arvestame, et $u(x + \Delta x) - u(x) = \Delta u$ ja $v(x + \Delta x) - v(x) = \Delta v$ ning leiame esmalt funktsiooni $f(x)$ muudu

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = \frac{u(x + \Delta x)}{v(x + \Delta x)} - \frac{u(x)}{v(x)} = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} - \frac{u}{v} = \frac{uv + v \cdot \Delta u - uv - u \cdot \Delta v}{v(v + \Delta v)} = \frac{v \cdot \Delta u - u \cdot \Delta v}{v(v + \Delta v)}.$$

Seejärel lähtume tuletise definitsioonist 3.2 ja arvestame, et $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta v = 0$:

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{v \frac{\Delta u}{\Delta x} - u \frac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v + \Delta v)} = \frac{v \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} - u \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta v)} = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}.$$

Näide 3.2. Leida funktsiooni $y = x^3 \cos x$ tuletis, kasutades korrutise tuletise valemit (3.6).

$$y' = (x^3 \cdot \cos x)' = (x^3)' \cdot \cos x + x^3 \cdot (\cos x)' = 3x^2 \cos x - x^3 \sin x.$$

Näide 3.3. Leida funktsiooni $y = \frac{3x^2}{2^x}$ tuletis, kasutades jagatise tuletise valemit (3.8).

$$y' = \left(\frac{3x^2}{2^x} \right)' = \frac{(3x^2)' \cdot 2^x - 3x^2 \cdot (2^x)'}{(2^x)^2} = \frac{6x \cdot 2^x - 3x^2 \cdot 2^x \cdot \ln 2}{(2^x)^2} = \frac{6x - 3x^2 \cdot \ln 2}{2^x}.$$

3.4. PÖÖRDFUNKTSIOONI TULETIS. ARKUSFUNKTSIOONIDE TULETIS

Teoreem 3.3. Kui piirkonnas X rangelt monotoonsel ja pideval funktsioonil $y = f(x)$ on kohal $x \in X$ nullist erinev tuletis $f'(x) \neq 0$, siis on pöördfunktsioonil $x = \varphi(y)$ kohal y tuletis $\varphi'(y)$, mis avaldub kujul

$$\varphi'(y) = \frac{1}{f'(x)}. \quad (3.9)$$

Tõestus. Funktsiooni $f(x)$ range monotoonsuse ja pidevuse tõttu on tema pöördfunktsioon $\varphi(y)$ ühene, rangelt monotoonne ja pidev (vt punkti 1.3 märkust 1.1 ja punkti 2.6). Seega, kui Δx tähendab funktsiooni $x = \varphi(y)$ muutust, mis vastab selle funktsiooni argumenti muudule Δy , siis $\Delta y \neq 0$ korral ka $\Delta x \neq 0$, kusjuures $\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \Delta x = 0$. Järelikult

$$\varphi'(y) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{f'(x)}.$$

Näide 3.4. Leida funktsiooni $y = \arcsin x$ tuletis (veenduda punkti 3.2 valemi 14 kehtivuses).

Funktsiooni $y = \arcsin x$ pöördfunktsioon on $x = \sin y$ määramispiirkonnaga $X = [-1; 1]$ ning muutumispiirkonnaga $Y = [-\pi/2; \pi/2]$, vt punkti 1.5. Vastavalt valemile (3.9) saame

$$(\arcsin x)'_x = \frac{1}{(\sin y)'_y} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{+\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Märgime eelnevale täiendavaks selgituseks, et $\cos y$ on vahemikus $(-\pi/2; \pi/2)$ positiivne.

Märkus 3.1. Lähtudes pöördfunktsiooni tuletise leidmise eeskirjast (3.9) on analoogsel viisil võimalik põhjendada teisi punktis 3.2 olevaid arkusfunktsioonide tuletise valemeid 15 – 17.

3.5. LIITFUNKTSIOONI TULETIS

Liitfunktsiooni mõistet on käsitletud punktis 1.4 ning järgnevas kasutatakse sealseid mõisteid ja tähistusi.

Teoreem 3.4. Kui funktsioonidel $\varphi(x)$ ja $f(u)$ on lõplikud tuletised vastavalt kohtadel x ja $u = \varphi(x)$, siis on liitfunktsioonil $F(x) = f[\varphi(x)]$ kohal x lõplik tuletis $F'(x)$, mis avaldub kujul

$$F'(x) = f'(u)\varphi'(x). \quad (3.10)$$

Teoreemi tõestus nõuab lõpmatult kahanevate suuruste süvendatumat tundmaõppimist, kui seda on tehtud käesoleva õppevahendi punktides 2.2 ja 2.4.

Näide 3.5. Leida funktsiooni $y = \ln(\arctan x) + \arctan(\ln x)$ tuletis.

$$y' = \frac{1}{\arctan x} \cdot \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+(\ln x)^2} \cdot \frac{1}{x}.$$

Esimeses liidetavas on kaks koostisosa, kusjuures „väliseks“ funktsiooniks naturaallõgaritm, mille tuletisest alustatakse. Tulemus korrutatakse vastavalt valemile (3.10) „sisemise“ funktsiooni ($\arctan x$) tuletisega. Praktikas seda „sisemist“ funktsiooni enamasti eraldi ei tähistata (näiteks tähega u nagu valemis (3.10)). Teises liidetavas on aga vastupidi „väliseks“ funktsiooniks arkustangens. Tema tuletisest alustatakse, jättes „sisemise“ funktsiooni ($\ln x$) üksiksümboliga tähistamata. Tulemus korrutatakse valemis (3.10) kohaselt „sisemise“ funktsiooni ($\ln x$) tuletisega.

Näide 3.6. Leida funktsiooni $y = \sqrt{\tan 3x}$ tuletis.

Siin on liitfunktsioonil kolm koostisosa, sest „väliseks“ funktsiooniks oleva ruutjuure argumendiks on omakorda liitfunktsioon $\tan 3x$. Seetõttu leitakse kõigepealt ruutjuure tuletis, korrutatakse see tangensi tuletisega ning lõpuks veel $3x$ tuletisega:

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{\tan 3x}} \cdot \frac{1}{\cos^2 3x} \cdot 3.$$

Näide 3.7. Leida funktsiooni $y = \sin^2 \frac{x}{2}$ tuletis.

„Väliseks“ funktsiooniks, mille tuletisest alustatakse, on astmefunktsioon, mitte siinus, millele on tähelepanu juhitud tähistusega $\sin^2 \frac{x}{2} = \left(\sin \frac{x}{2}\right)^2$. Murru $\frac{x}{2}$ tuletise leidmisel võib tuua konstandi $\frac{1}{2}$

tuletise märgi ette ning vältida keerulisema jagatise tuletise valemi (3.8) kasutamist: $\left(\frac{x}{2}\right)' = \frac{1}{2} \cdot x' = \frac{1}{2}$.

$$y' = \left[\left(\sin \frac{x}{2}\right)^2 \right]' = 2 \sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2} \cdot \frac{1}{2} = \sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2}.$$

Näide 3.8. Leida funktsiooni $y = 2^{\arcsin 5x}$ tuletis.

$$y' = 2^{\arcsin 5x} \cdot \ln 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{1-(5x)^2}} \cdot 5 = \frac{5 \ln 2}{\sqrt{1-25x^2}} 2^{\arcsin 5x}.$$

Näide 3.9. Leida funktsiooni $y = \ln \sin \sqrt{\arctan e^{4x}}$ tuletis.

$$y' = \frac{1}{\sin \sqrt{\arctan e^{4x}}} \cdot \cos \sqrt{\arctan e^{4x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\arctan e^{4x}}} \cdot \frac{1}{1+(e^{4x})^2} \cdot e^{4x} \cdot 4.$$

Näites 3.9 pole tulemust lihtsustatud.

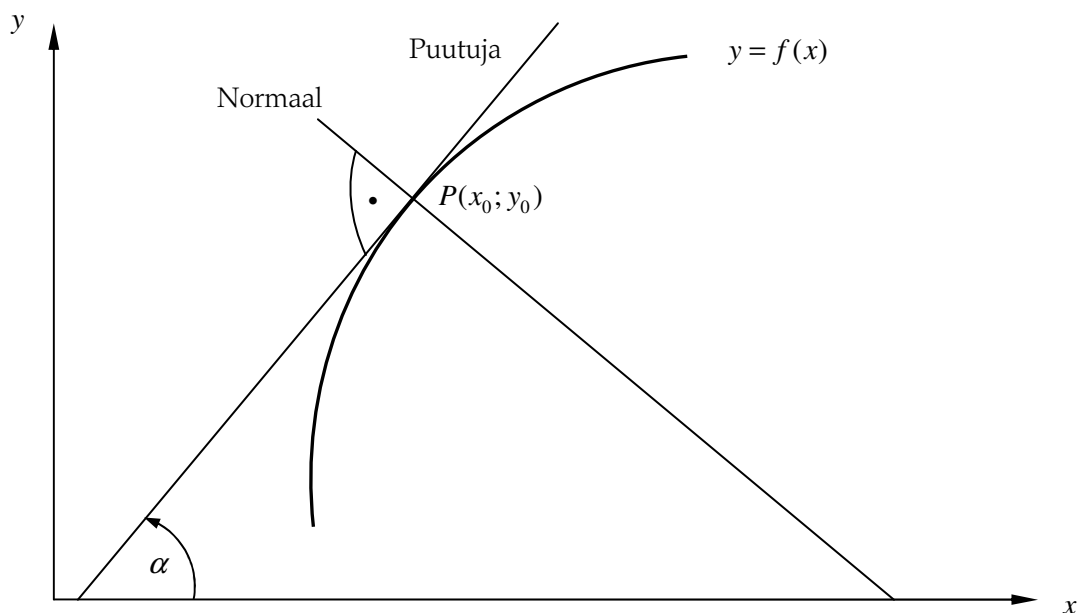
Näide 3.10. Leida $f'(1)$, kui $f(x) = \arccos \frac{2-x}{x\sqrt{2}}$.

Leiame kõigepealt tuletise $f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{2-x}{x\sqrt{2}}\right)^2}} \cdot \frac{-x\sqrt{2} - (2-x)\sqrt{2}}{2x^2}$

ning seejärel arvutame $f'(1) = -\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}} \cdot \frac{-\sqrt{2} - \sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2.$

3.6. JOONE PUUTUJA JA NORMAALI VÖRRAND

Funktsiooni tuletise geomeetriliseks tähenduseks on teatavasti joone $y = f(x)$ puutuja tõus $\tan \alpha$ (vt (3.2) ning jooniseid 3.1 ja 3.2) punktis $P(x_0; y_0)$ (vt 3.1 ja joonist 3.1 ja puutuja definitsiooni 3.1). Siin tuletame joone puutuja ja normaali (joonis 3.2) võrrandid.



Joonis 3.2. Joone $y = f(x)$ puutuja ja normaal punktis $P(x_0; y_0)$

Geomeetriast on teada, et punkti $P(x_0; y_0)$ läbiva sirge võrrand on $y - y_0 = k(x - x_0)$, kus k on sirge tõus. Teatavasti on puutuja tõus $k_p = \tan \alpha = f'(x)$ (vt (3.2)). Seega avaldub (y -teljega mitteparalleelse) puutuja võrrand kujul

$$y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0). \quad (3.11)$$

Definitsioon 3.4. Joone normaaliks antud punktis nimetatakse sirget, mis läbib antud punkti ja on risti puutujaga selles punktis (vt joonist 3.2)

Kui puutuja tõus on k_p , siis normaali kui tema ristsirge (definitsioon 3.4) tõus on $k_n = -\frac{1}{k_p}$ ning normaali võrrand on seega

$$y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0). \quad (3.12)$$

Märkus 3.2. Kui $f'(x_0) = 0$, siis puutuja võrrand on $y = y_0$ ja normaali võrrand on $x = x_0$.

Märkus 3.3. Kui $f'(x_0) \rightarrow \pm\infty$, siis puutuja võrrand on $x = x_0$ ja normaali võrrand on $y = y_0$.

Näide 3.11. Leida joone $y = (x-1) \cdot \sqrt[3]{5-x}$ puutuja ja normaali võrrand punktides $A(-3; -8)$, $B(4; 3)$ ja $C(5; 0)$.

Funktsiooni tuletis avaldub vastavalt korrutise tuletise valemile (3.6) kujul

$$f'(x) = \sqrt[3]{5-x} - \frac{1}{3}(x-1) \cdot (5-x)^{-\frac{2}{3}}.$$

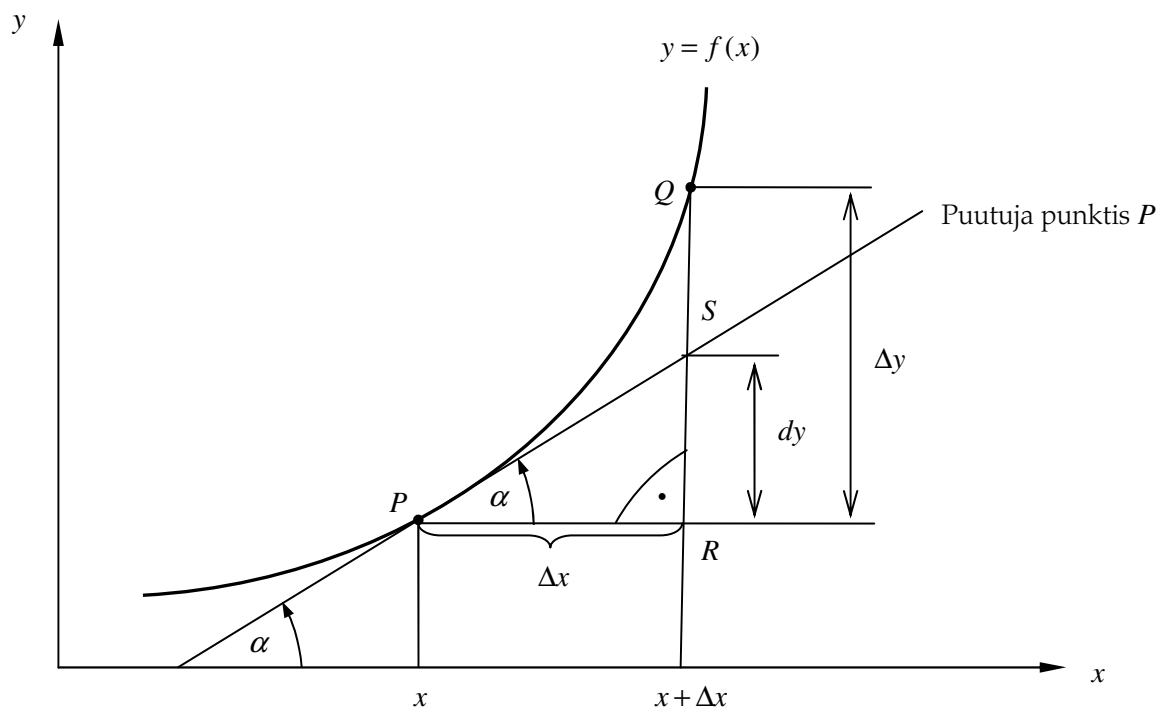
1. Punktis $A(-3; -8)$ tuleb $f'(-3) = 2 - \frac{1}{3} \cdot (-4) \cdot \frac{1}{4} = 2 + \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$ ning seega on puutuja $y + 8 = \frac{7}{3}(x + 3)$ ehk $7x - 3y - 3 = 0$ ja normaal $y + 8 = -\frac{3}{7}(x + 3)$ ehk $3x + 7y + 65 = 0$.
2. Punktis $B(4; 3)$ tuleb $f'(4) = 1 - \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot 1 = 0$ ning seega on puutuja $y = 3$ ja normaal $x = 4$ (vt märkust 3.2).
3. Punktis $C(5; 0)$ tuleb $f'(5) \rightarrow -\infty$ ning seega on puutuja $x = 5$ ja normaal $y = 0$ (vt märkust 3.3).

3.7. DIFERENTSIAALI MÕISTE JA GEOMEETRILINE TÄHENDUS

Vaatleme joone $y = f(x)$ puutujat punktis P abstsissiga x (joonis 3.3). Puutuja moodustab x -teljega positiivse nurga α . Teatavasti vastavalt funktsiooni tuletise geomeetrilisele tähendusele on $f'(x) = \tan \alpha$ (vt punkti 3.1). Kui abstsissile x anda muut Δx , siis joone $y = f(x)$ ordinaat y saab muudu $\Delta y = RQ$, puutuja ordinaat aga muudu RS . Täisnurksest kolmnurgast PRS leiame puutuja ordinaadi muudu RS ja tähistame selle sümboliga dy :

$$RS = PR \cdot \tan \alpha = f'(x_p) \cdot \Delta x = dy. \quad (3.13)$$

dy on funktsiooni diferentsiaal, mis geomeetriliselt kujutab funktsiooni graafiku puutuja ordinaadi muutu.



Joonis 3.3. Funktsiooni diferentsiaali geomeetriline tähendus

Pöörame joonisel 3.3 tähelepanu sellele, et funktsiooni muut $\Delta y = RQ$ koosneb kahest osast, diferentsiaalst $dy = RS$ ja lõigust SQ :

$$\Delta y = dy + SQ. \quad (3.14)$$

On võimalik näidata, et piirprotsessis $\Delta x \rightarrow 0$ on $dy = RS$ sama järku lõpmatult kahanev suurus Δx suhtes, kuid SQ on Δx suhtes kõrgemat järku lõpmatult kahanev suurus, vt punkti 2.4 definitsiooni 2.5 (lihtsustatult öeldes, kui Δx kahaneb, siis muutub valemi (3.14) teine liidetav SQ võrreldes esimese liidetavaga RS tunduvalt väiksemaks). Öeldakse, et RS on funktsiooni muudu Δy peaosas (peamine, domineeriv, suhteliselt suurem osa). Nagu eespool juba märgitud, nimetatakse funktsiooni muudu Δy peaosas, mis on võrdeline argumenti muuduga Δx , funktsiooni diferentsiaaliks:

$$dy = f'(x)\Delta x. \quad (3.15)$$

Erijuhul kui $y = x$ saadakse $dy = 1 \cdot \Delta x = \Delta x$. Vastavalt sellele erijuhule nimetatakse antud kontekstis argumenti x muutu Δx argumenti diferentsiaaliks ja tähistatakse dx . Arvestades tähistust $dx = \Delta x$, võib (3.15) kirjutada kujul

$$dy = f'(x)dx. \quad (3.16)$$

Kui seosest (3.16) avaldada $f'(x) = \frac{dy}{dx}$, siis saab funktsiooni tuletise ühte võimalikku tähistust $\frac{dy}{dx}$ tõlgendada kui funktsiooni diferentsiaali ja argumenti diferentsiaali suhet.

Näide 3.12. Leida funktsiooni $f(x) = \ln|x + \sqrt{x^2 + a}|$ diferentsiaal.

Leiame kõigepealt funktsiooni tuletise

$$f'(x) = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + a}} \cdot \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x^2 + a}} \cdot 2x \right) = \frac{x + \sqrt{x^2 + a}}{(x + \sqrt{x^2 + a})\sqrt{x^2 + a}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + a}}$$

ning seejärel vastavalt seosele (3.16) funktsiooni diferentsiaali $dy = \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}}$.

3.8. DIFERENTSIAALI OMADUSI

Punktis 3.3 on vaadeldud tehetega seotud diferentseerimisreegleid. Korrutades sealseid valemeid (3.5) – (3.8) argumendi diferentsiaaliga dx , saadakse funktsioonide $u = u(x)$ ja $v = v(x)$ summa ja vahe ning korrutise ja jagatise diferentsiaali arvutamiseks järgmised valemid:

$$d(u \pm v) = du \pm dv, \quad (3.17)$$

$$d(u \cdot v) = vdu + udv, \quad (3.18)$$

$$d(c \cdot u) = cdu, \text{ kus } c = \text{const}, \quad (3.19)$$

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}. \quad (3.20)$$

Näide 3.13. Leida funktsiooni $f(x) = xe^x$ diferentsiaal.

Vastavalt valemile (3.18) saame $d(xe^x) = e^x dx + xe^x dx = (1+x)e^x dx$.

Märkus 3.4. Leiame liitfunktsiooni $F(x) = f(u)$, kus $u = \varphi(x)$ diferentsiaali. Teatavasti avaldub liitfunktsiooni tuletis kujul $F'(x) = f'(u)\varphi'(x)$, vt (3.10). Korrutame selle võrduse mõlemad pooli argumendi diferentsiaaliga dx ja saame $dF = f'(u)\varphi'(x)dx$ ehk $dF = f'(u)du$. Kui aga u oleks sõltumatu muutuja, siis tuleb samuti $df = f'(u)du$ ja seega

$$dF = df. \quad (3.21)$$

Eelnevast arutelust ja seosest (3.21) järeldub, et funktsiooni $f(u)$ diferentsiaalil on alati kuju $f'(u)du$, hoolimata sellest, kas u on sõltumatu muutuja või teisest argumendist x sõltuv muutuja. Öeldakse, et diferentsiaali kuju $f'(u)du$ on invariantne muutujate vahetuse $u = \varphi(x)$ suhtes.

3.9. DIFERENTSIAALI KASUTAMINE LIGIKAUDSETES ARVUTUSTES

Punktis 3.7 oli analüüsitud, et funktsiooni muut Δy koosneb kahest osast: peaosast dy ja protsessis $\Delta x \rightarrow 0$ tunduvalt väiksemast osast SQ (vt joonist 3.3 ja valemit (3.14)). Täpsemalt, SQ on piirprotsessis $\Delta x \rightarrow 0$ kõrgemat järku lõpmatult kahanev suurus kui dy , vt punkti 2.4 definitsiooni 2.5. Kui Δx on „väike“, siis jättes valemis (3.14) teise liidetava ära, saadakse seos

$$\Delta y \approx dy, \quad (3.22)$$

mida võib kasutada ligikaudsetes arvutustes. Seos (3.22) avaldub detailsemalt kujul

$$f(x + \Delta x) - f(x) \approx f'(x)\Delta x, \quad (3.23)$$

millest

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x. \quad (3.24)$$

Argumendi muut Δx on ligikaudses võrduses (3.24) lõplik suurus. Vähemalt rahuldava arvutustäpsuse saavutamiseks peab Δx olema küllalt „väike“. Sellekohased hinnangud, millal võib argumendi muudu Δx lugeda piisavalt väikeseks, selguvad järgnevatest näidetest.

Näide 3.14. Arvutada ligikaudu a) $\sqrt{38}$ ja b) $\sqrt{34}$, kasutades sobivalt valitud funktsiooni diferentsiaali.

Kuna nõutud on ruutjuure arvutamist, siis valime $f(x) = \sqrt{x}$ ja leiame $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Olgu $x = 36$ (kaalutlusel, et $\sqrt{36} = 6$). Siis juhul

$$\text{a) } \Delta x = 38 - 36 = 2 \text{ ning juhul}$$

$$\text{b) } \Delta x = 34 - 36 = -2.$$

Arvutame seosega (3.24) juhul a) $\sqrt{38} \approx \sqrt{36} + \frac{1}{2\sqrt{36}} \cdot 2 = 6 + \frac{1}{6} \approx 6,167$ ning juhul

$$\text{b) } \sqrt{34} \approx \sqrt{36} + \frac{1}{2\sqrt{36}} \cdot (-2) = 6 - \frac{1}{6} \approx 5,533.$$

Näide 3.15. Arvutada ligikaudu $\arcsin 0,05$, kasutades sobivalt valitud funktsiooni diferentsiaali.

Valime $f(x) = \arcsin x$ ja leiame $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Olgu $x = 0$ (kaalutlusel, et $\arcsin 0 = 0$). Siis $\Delta x = 0,05$.

Arvutame seosega (3.24) $\arcsin 0,05 \approx \arcsin 0 + \frac{1}{\sqrt{1-0^2}} \cdot 0,05 = 0 + 0,05 = 0,05$.

Näide 3.16. Arvutada ligikaudu $\sin 31^\circ$, kasutades sobivalt valitud funktsiooni diferentsiaali.

Valime $f(x) = \sin x$ ja leiame $f'(x) = \cos x$. Siin peab Δx olema radiaanides. Olgu $x = 30^\circ$ ehk $x = \frac{\pi}{6}$,

siis $\Delta x = \frac{\pi}{180}$. Arvutame vastavalt seosele (3.24) $\sin 31^\circ \approx \sin 30^\circ + \cos 30^\circ \cdot \frac{\pi}{180} \approx 0,5 + 0,015 = 0,515$.

Märkus 3.3. Näited 3.14, 3.15 ja 3.16 pigem illustreerivad diferentsiaali mõistet ning on praktiliseks arvutuseks suhteliselt ebatäpsed. Täpsemat ja arvutusmatemaatikas laialdaselt kasutatavat Taylori valemit vaadeldakse järgmises, tuletise rakenduste peatükis punktis 4.10.

3.10. KÕRGEMAT JÄRKU TULETISED

Funktsiooni esimest järku tuletis $f'(x)$ on üldiselt argumendi x funktsioon (vt näiteid 3.5 – 3.9) või erandina konstant. Diferentseerides tuletisfunktsiooni $f'(x)$, saadakse funktsiooni $f(x)$ teine tuletis $[f'(x)]' = f''(x)$, mida tähistatakse ka sümbolitega y'' või $\frac{d^2 y}{dx^2}$. Niisiis on teine tuletis (teist järku tuletis) funktsiooni esimese tuletise tuletis.

Liikumise kiirendus

Vaatleme masspunkti sirgjoonelist liikumist seaduse $s = f(t)$ kohaselt, kus s on teepikkus ja t on aeg. Masspunkti liikumise hetkkiirus on $v = f'(t) = \frac{ds}{dt}$ (vt punkti 3.1). Olgu hetkel t kiirus v . Kui liikumine ei ole ühtlane, siis Δt jooksul muutub kiirus Δv võrra: $\Delta v = f'(t + \Delta t) - f'(t)$. Keskmise kiirendus Δt vältel on $a_k = \frac{\Delta v}{\Delta t}$. Hetkkiirendus on

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{ds}{dt} \right) = \frac{d^2 s}{dt^2}. \quad (3.25)$$

Seega sirgjoonelise liikumise kiirendus võrdub teepikkuse teise tuletisega aja järgi.

Näide 3.17. Leida funktsiooni $y = (5x - 1)\ln^2 x$ teine tuletis.

Leiame kõigepealt esimese tuletise $y' = 5\ln^2 x + (5x - 1) \cdot 2\ln x \cdot \frac{1}{x} = 5\ln^2 x + \left(10 - \frac{2}{x}\right)\ln x$ ja seejärel teise tuletise $y'' = 2 \cdot 5 \cdot \ln x \cdot \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} \cdot \ln x + \left(10 - \frac{2}{x}\right) \cdot \frac{1}{x} = \frac{10\ln x}{x} + \frac{2\ln x}{x^2} + \frac{10x - 2}{x^2} = \frac{2}{x^2} (5x\ln x + \ln x + 5x - 1)$.

Märkus 3.5. Funktsiooni teise tuletise tuletist nimetatakse kolmandaks tuletiseks, mida tähistatakse kas y''' või $f'''(x)$ või $\frac{d^3 y}{dx^3}$. Üldiselt võib rääkida n -järku tuletisest $y^{(n)}$.

Näide 3.18. Leida funktsiooni $y = a^x$ n -järku tuletis $y^{(n)}$.

$$\begin{aligned} y' &= a^x \ln a \\ y'' &= a^x (\ln a)^2 \\ y''' &= a^x (\ln a)^3 \\ &\dots\dots\dots \\ y^{(n)} &= a^x (\ln a)^n \end{aligned}$$

Märkus 3.6. Teist järku diferentsiaal avaldub kujul (3.26) ning n -järku diferentsiaal kujul (3.27):

$$d^2 y = f''(x) dx^2, \quad (3.26)$$

$$d^n y = f^{(n)}(x) dx^n. \quad (3.27)$$

Kokkuleppeliselt tähistatakse $dx^2 = (dx)^2$ ja $dx^n = (dx)^n$.

4. FUNKTSIOONI TULETISE RAKENDUSI

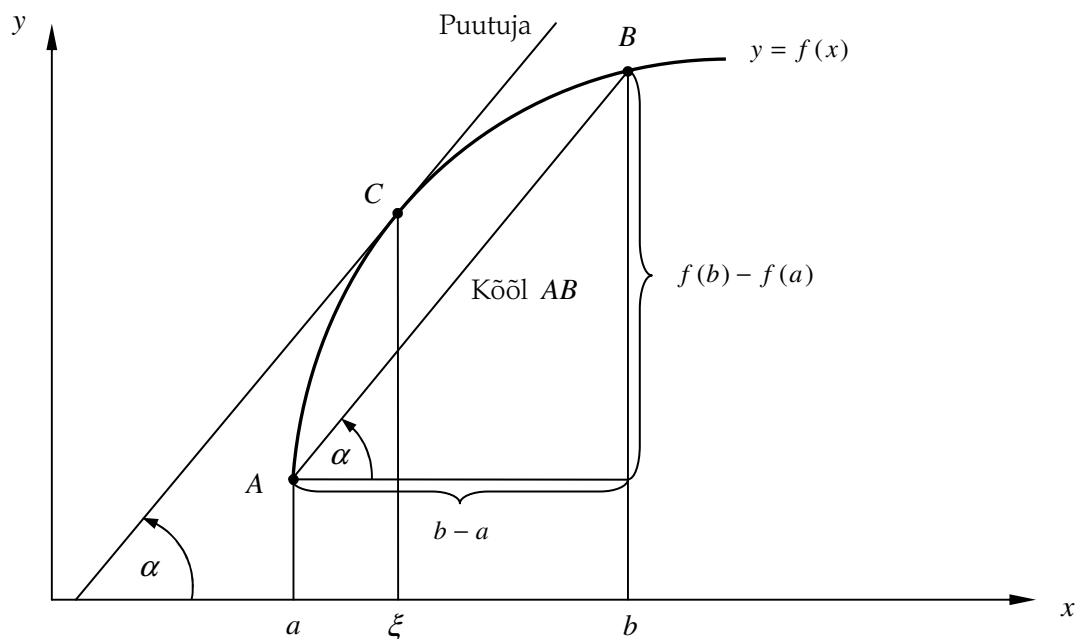
4.1. LAGRANGE'I KESKVÄÄRTUSTEOREEM

Diferentsiaalarvutuse keskväärtusteoreemid on teoreetiliseks aluseks paljude funktsiooni tuletisega seotud rakenduslik-praktiliste küsimuste põhjendamisel. Toome järgnevas nendest teoreemidest enamkasutatavama **Lagrange'i keskväärtusteoreemi**.

Teoreem 4.1. (Lagrange'i keskväärtusteoreem). Kui funktsioon $f(x)$ on pidev lõigus $[a; b]$ ja diferentseeruv vahemikus $(a; b)$, siis leidub vahemikus $(a; b)$ vähemalt üks punkt ξ , mille puhul kehtib valem

$$f(b) - f(a) = f'(\xi) \cdot (b - a). \quad (4.1)$$

Lagrange'i teoreemile saab anda joonisel 4.1 esitatud geomeetrilise tõlgenduse, mis ühtlasi võimaldab seda teoreemi tõestada.



Joonis 4.1. Lagrange'i teoreemi geomeetiline interpretatsioon

Kui pideval joonel AB on igas punktis A ja B vahel olemas puutuja, mis ei ole risti x -teljega, siis leidub joonel AB vähemalt üks punkt C , kus puutuja on paralleelne kõõluga AB . Joonisel 4.1 olevate tähistete kohaselt võib leida puutuja tõusu

$$\tan \alpha = f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \quad (4.2)$$

Kui puutuja tõusu valemist (4.2) avaldada $f(b) - f(a)$, siis saabki Lagrange'i keskväärtusvalemi (4.1).

4.2. L'HOSPITALI REEGEL PIIRVÄÄRTUSE ARVUTAMISEKS

Juhul kui põhiteoreemid piirväärtustest ei ole rakendatavad ja piirväärtuste arvutamisel tekib määramatus, siis tuleb piirväärtuste leidmiseks kasutada kunstlikke võtteid, mis seisnevad funktsiooni eelnevas ja sageli küllaltki tülikas ning tihtipeale esialgu läbinähtamatus teisendamises (eriti trigonomeetriliste funktsioonide puhul). Mõned sellekohased näited 2.1 kuni 2.7 on toodud teise peatüki (Funktsiooni piirväärtus ja pidevus) punktis 2.3. Funktsiooni tuletise valdamine võimaldab aga anda piirväärtuste arvutamiseks lihtsama ja loogilisema meetodi, nn **L'Hospitali reegli**.

Teoreem 4.2. (L'Hospitali reegel). Kui $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ või $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = \lim_{x \rightarrow a} |g(x)| = \infty$ ja eksisteerib piirväärtus $l = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, siis $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = l$.

Seega määramatuste $\frac{0}{0}$ ja $\frac{\infty}{\infty}$ puhul taandab L'Hospitali reegel funktsioonide suhte piirväärtuse arvutamise nende funktsioonide tuletiste suhte piirväärtuse arvutamisele.

Muude määramatuste puhul vajab funktsioon eelnevat teisendamist (enamasti hästi formaliseeritavate ja selgete eeskirjade alusel, vt märkust 4.2 ja punkti 4.9 näiteid 4.19 ja 4.20). Lihtsa struktuuriga L'Hospitali reegli tõestamine on aga üsnagi keeruline ja nõuab Cauchy keskäärtusteoreemi tundmist, mida käesolevas õppevahendis ei vaadelda.

Näide 4.1. Arvutada piirväärtus $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 2x - 1}{x^2 - x + 1}$.

Piirväärtuse vahetu arvutamine tehetege seotud piirväärtuste omaduste (2.1) – (2.4) alusel ei anna tulemust, sest tegemist on määramatusega $\frac{\infty}{\infty}$. Järgnevas kirjutame määramatuse liigi võrdusmärgi alla sulgudesse.

Eeldused L'Hospitali reegli kasutamiseks on täidetud ning leiame avaldise lugejast ja nimetajast eraldi tuletise (mitte segi ajada jagatise tuletise valemiga (3.8)). Pärast esmast L'Hospitali reegli kasutamist on jällegi tegemist määramatusega $\frac{\infty}{\infty}$, mistõttu kasutame reeglit teistkordselt. Reegli mitmekordne järjestikune kasutamine on tüüpiline, kuid loomulikult peab iga kord veenduma kasutamise eelduste täidetuses.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 2x - 1}{x^2 - x + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(3x^2 + 2x - 1)'}{(x^2 - x + 1)'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x + 2}{2x - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(6x + 2)'}{(2x - 1)'} = \frac{6}{2} = 3.$$

Näide 4.2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(e^x)'}{(x^3)'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(e^x)'}{(3x^2)'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{6x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(e^x)'}{(6x)'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{6} = \infty.$

Näide 4.3. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x^2 - 1)'}{(x^2 + 3x + 2)'} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x}{2x + 3} = \frac{-2}{1} = -2.$

Juhime tähelepanu, et pärast esmakordset L'Hospitali reegli kasutamist polnud näites 4.3 enam tegemist määramatusega ning piirväärtuse sai vahetult arvutada (L'Hospitali reegli kasutamine ilma selleks eeldusi omamata annaks vale tulemuse).

Näide 4.4. $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{2 - \sqrt{x - 3}}{x^2 - 49} = \lim_{x \rightarrow 7} \frac{(2 - \sqrt{x - 3})'}{(x^2 - 49)'} = \lim_{x \rightarrow 7} \frac{-\frac{1}{2\sqrt{x - 3}}}{2x} = -\lim_{x \rightarrow 7} \frac{1}{4x\sqrt{x - 3}} = -\frac{1}{4 \cdot 7 \cdot 2} = -\frac{1}{56}.$

$$\begin{aligned} \text{Näide 4.5. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x - \sin x} &= \lim_{\left(\frac{0}{0}\right)_{x \rightarrow 0}} \frac{(\tan x - \sin x)'}{(x - \sin x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\cos^2 x} - \cos x}{1 - \cos x} = \lim_{\left(\frac{0}{0}\right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{1}{\cos^2 x} - \cos x\right)'}{(1 - \cos x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{+2 \cos x \cdot \sin x}{\cos^4 x} + \sin x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(2 \frac{1}{\cos^3 x} + 1\right) = 3. \end{aligned}$$

$$\text{Näide 4.6. } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt[3]{\tan x} - 1}{2 \sin^2 x - 1} = \lim_{\left(\frac{0}{0}\right)_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}}} \frac{(\sqrt[3]{\tan x} - 1)'}{(2 \sin^2 x - 1)'} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\frac{1}{3}(\tan x)^{-\frac{2}{3}} \cdot \frac{1}{\cos^2 x}}{4 \sin x \cdot \cos x} = \frac{\frac{1}{3} \cdot 1 \cdot \frac{4}{2}}{4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{3}.$$

Märkus 4.1. Näite 4.1 lahendamine ilma L'Hospitali reeglita nõudnuks avaldise kõikide liikmete läbijagamist argumendi x kõrgeima astmega (antud juhul x^2 -ga). Näites 4.3 tulnuks lugeja ja nimetaja lahutada teguriteks (kuna $x \rightarrow -1$, siis on nii lugejas kui nimetajas oodata teguri $x+1$ eraldumist, mis ongi piirväärtuse vahetel arvutamisel lugejas ja nimetajas nulli tekkimise allikaks). Näites 4.4 aga peaks ruutjuure teisendama lugejast nimetajasse, korrutades nii lugejat kui nimetajat avaldisega $2 + \sqrt{x-3}$ (pärast seda tulevad veel lugeja ja nimetaja lahutada teguriteks; näide 4.4 on ilma L'Hospitali reeglita „kahekäiguline“). Näidete 4.5 ja 4.6 lahendamine oleks ilma L'Hospitali reeglita veelgi tülikam ja nõuaks esmapilgul läbinähtamatuid trigonomeetrilisi teisendusi, selleks et luua eeldused näites 2.8 toodud valemite kasutamiseks. Võrdluseks vt ka punkti 2.3 näiteid 2.1 – 2.7 piirväärtuse arvutamise kohta ilma L'Hospitali reeglita.

Märkus 4.2. Kui $\lim f = 0$ ja $\lim |g| = \infty$, siis $\lim(f \cdot g)$ on määramatus $0 \cdot \infty$.

Kui teisendada $\lim(f \cdot g) = \lim \frac{f}{\frac{1}{g}}$, siis saadakse määramatus $\frac{0}{0}$, kui aga teisendada $\lim(f \cdot g) = \lim \frac{g}{\frac{1}{f}}$,

siis määramatus $\frac{\infty}{\infty}$. Nii ühel kui teisel juhul on nüüd L'Hospitali reegli kasutamise eeldused täidetud.

Käesoleva õppevahendi näidetes piirduakse põhiliselt määramatustega $\frac{0}{0}$ ja $\frac{\infty}{\infty}$. Ainsateks ülesanneteks, kus kasutatakse märkuses 4.2 toodud teisendusi, on punkti 4.9 näited 4.19 ja 4.20.

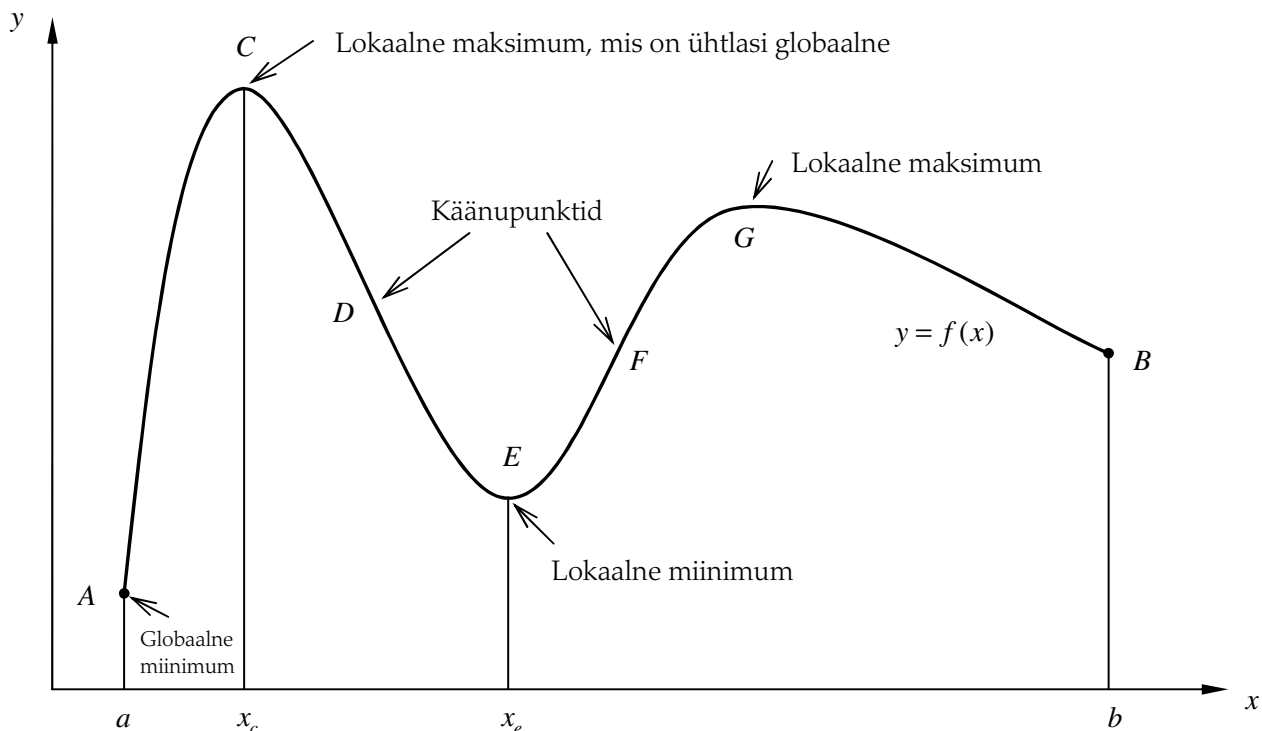
4.3. FUNKTSIOONI UURIMINE DIFERENTSIAALARVUTUSE ABIL

Uurime diferentseeruva funktsiooni $y = f(x)$ käitumist lõigus $[a; b]$. Meenutame, et kui funktsioonil on antud kohal lõplik tuletis, siis öeldakse, et funktsioon on sellel kohal diferentseeruv (definiitsioon 3.3). Joonisel 4.2 on kujutatud niisuguste omadustega diferentseeruva funktsiooni $y = f(x)$ graafik, mis võimaldab mõnede funktsiooni uurimisega seotud põhimõistete sissejuhatavat selgitamist. Lõigu vasakpoolses otspunktis kohal $x = a$ on selle funktsiooni vähim väärtus antud lõigus (nagu öeldakse, **globaalne miinimum**). Funktsiooni suurim väärtus lõigus $[a; b]$ (**globaalne maksimum**) on aga selle lõigu sisepunktis kohal $x = c$ (joonel on see punkt märgitud tähega C).

Vaatleme joonisel 4.2 punkti C (kus $x = c$) lähiümbrust ja piirdume siinkohal intuitiivse käsiteluga, defineerimata täpsemalt punkti ümbruse mõistet (mida on tehtud punkti 4.6 definiitsioonis 4.2). Pöörame tähelepanu sellele, et nii punkti C vasakpoolses kui ka parempoolses lähiümbruses on funktsiooni $y = f(x)$ väärtused väiksemad kui punktis C endas. Punkti C vasakpoolses ümbruses funktsioon $f(x)$ kasvab, parempoolses ümbruses aga kahaneb.

Öeldakse, et funktsioonil $f(x)$ on kohal $x = x_c$ **lokaalne maksimum**. Nagu eespool nimetatud, on antud juhul sellel kohal ühtlasi globaalne maksimum. Joonisel 4.2 kujutatud funktsioonil on veel teine lokaalne maksimum joone punktis G , sest G lähikümbuses on funktsiooni väärtused väiksemad kui punktis G endas (G vasakpoolses ümbruses funktsioon kasvab, parempoolses ümbruses aga kahaneb).

Joone punktis E on aga **lokaalne miinimum**. Öeldakse, et funktsioonil $f(x)$ on kohal $x = x_e$ lokaalne miinimum, kui nii punkti E vasakpoolses kui ka parempoolses lähikümbuses on funktsiooni $y = f(x)$ väärtused suuremad kui punktis E endas. Punkti E vasakpoolses ümbruses funktsioon $f(x)$ kahaneb, parempoolses ümbruses aga kasvab.



Joonis 4.2. Diferentseeruva funktsiooni $y = f(x)$ käitumine lõigus $[a; b]$

Üheks probleemide kompleksiks, mida järgnevatel punktides detailsemalt vaadeldakse, on:

- globaalsed ekstreemumid (funktsiooni suurim ja vähim väärtus antud lõigus), vt 4.4;
- funktsiooni kasvamis- ja kahanemiskiirkonnad (s.o monotoonsuse piirkonnad), vt 4.5;
- funktsiooni lokaalsed ekstreemumid, vt 4.6.

Eelnevatele küsimustele saab suures osas vastata funktsiooni $y = f(x)$ esimese tuletise analüüsimise alusel.

Teise tuletise uurimine võimaldab aga leida:

- joone kumerus- ja nõguspiirkonnad, vt 4.7;
- käänupunktid, vt 4.7.

Joone kumeruse ja nõgususe mõiste defineeritakse järgnevas detailsemalt (punkti 4.7 definitsioonis 4.4), kuid sissejuhataval intuiitvusel tasandil võib öelda, et joonisel 4.1 olev joon on kumer punktide ACD ja FGB vahel ning nõgus punktide DEF vahel. Punktid D ja F , mis eraldavad joone kumerat osa nõgusast, on **käänupunktid** (täpsemalt vt punkti 4.7 definitsiooni 4.5).

4.4. FUNKTSIOONI GLOBAALSED EKSTREEMUMID

Järgnevas vaatleme diferentseeruva funktsiooni $f(x)$ suurima ja vähima väärtuse leidmist antud lõigus $[a; b]$, s. o globaalsete ekstreemumite leidmist.

Definitsioon 4.1. Niisugust punkti, kus $f'(x)=0$, nimetatakse funktsiooni $f(x)$ **statsionaarseks punktiks**.

Geomeetriselt tähendab definitsioon 4.1, et statsionaarses punktis on funktsiooni graafiku puutuja paralleelne x -teljega (vt punkti 3.1 ja valemit (3.2)).

Teoreem 4.3. (Fermat' teoreem). Kui funktsioonil $f(x)$ on ekstremaalne väärtus määramispiirkonna X sisepunktis ξ , kus $f(x)$ on diferentseeruv, siis ξ on funktsiooni $f(x)$ statsionaarne punkt (s.t $f'(\xi)=0$).

Pisut lihtsustatult võib öelda, et diferentseeruva funktsiooni ekstreemumpunktid on ühtlasi statsionaarsed punktid (kus $f'(x)=0$).

Juhis 4.1. Toetudes Fermat' teoreemile, võib diferentseeruva funktsiooni globaalsed ekstreemumid lõigus $[a; b]$ leida järgmise skeemi alusel.

1. Leiame funktsiooni $f(x)$ statsionaarsed punktid ja arvutame funktsiooni väärtused antud lõigu $[a; b]$ jäävates statsionaarsetes punktides (väljaspool antud lõiku olevad statsionaarsed punktid jäävad vaatluse alt kõrvale).
2. Arvutame funktsiooni $f(x)$ väärtused lõigu $[a; b]$ otspunktides $f(a)$ ja $f(b)$.
3. Käesoleva arvutuseeskirja osades (1) ja (2) arvatud tulemustest suurim on globaalne maksimum ja vähim on globaalne miinimum. Teiste sõnadega, globaalsete ekstreemumite üle otsustamiseks võrreldakse funktsiooni väärtusi antud lõiku jäävates statsionaarsetes punktides ja selle lõigu otspunktides.

Näide 4.7. Leida funktsiooni $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$ globaalsed ekstreemumid lõigus $[-1; 5]$.

Lahendame ülesande juhises 4.1 toodud skeemi kohaselt.

1. Leiame kõigepealt funktsiooni esimese tuletise $f'(x) = 6x^2 + 6x - 12$. Seejärel võrdsustame esimese tuletise nulliga ja saame võrrandi $6x^2 + 6x - 12 = 0$ ehk $x^2 + x - 2 = 0$. Selle (ruut)võrrandi lahendid $x_1 = 1$ ja $x_2 = -2$ on statsionaarsed punktid. Neist $x_1 = 1$ on antud lõigus $[-1; 5]$, kuid $x_2 = -2$ jääb väljapoole seda lõiku. Seega arvutame funktsiooni $f(x)$ väärtuse vaid lõigu sisepunktis $x_1 = 1$:

$$f(1) = 2 \cdot 1^3 + 3 \cdot 1^2 - 12 \cdot 1 + 1 = -6. \quad (4.3)$$

2. Arvutame funktsiooni $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$ väärtused lõigu otspunktides $x_3 = -1$ ja $x_4 = 5$:

$$f(-1) = 2 \cdot (-1)^3 + 3 \cdot (-1)^2 - 12 \cdot (-1) + 1 = 14, \quad (4.4)$$

$$f(5) = 2 \cdot 5^3 + 3 \cdot 5^2 - 12 \cdot 5 + 1 = 266. \quad (4.5)$$

3. Võrreldes arvutustulemusi (4.3), (4.4) ja (4.5) leiame neist suurima $f(5) = 266$, mis on funktsiooni globaalne maksimum lõigus $[-1; 5]$ ning vähima $f(1) = -6$, mis on globaalne miinimum selles lõigus. Antud näites on globaalne maksimum vaadeldava lõigu parempoolses otspunktis kohal $x_4 = 5$ ja globaalne miinimum on lõigu sisepunktis olevas statsionaarses punktis $x_1 = 1$.

Näide 4.8. Leida funktsiooni $f(x) = x - 2\ln x$ globaalsed ekstreemumid lõigus $[1; e]$.

Vormistame lahenduse vastavalt juhisele 4.1.

1. Funktsiooni esimene tuletis on $f'(x) = 1 - \frac{2}{x}$. Võrdsustame esimese tuletise nulliga ja saame võrrandi $1 - \frac{2}{x} = 0$ ehk $\frac{x-2}{x} = 0$. Kuna võrrandi lahend $x_1 = 2$ (statsionaarne punkt) on antud lõigus $[1; e]$, siis arvutame selles punktis funktsiooni $f(x)$ väärtuse:

$$f(2) = 2 - 2\ln 2 \approx 0,6137. \quad (4.6)$$

2. Arvutame funktsiooni $f(x) = x - 2\ln x$ väärtused lõigu otspunktides $x_2 = 1$ ja $x_3 = e$:

$$f(1) = 1 - 2\ln 1 = 1, \quad (4.7)$$

$$f(e) = e - 2\ln e \approx 0,7183. \quad (4.8)$$

3. Arvutustulemustest (4.6), (4.7) ja (4.8) suurim $f(1) = 1$ on globaalne maksimum lõigus $[1; e]$ ning vähim $f(2) \approx 0,6137$ on globaalne miinimum selles lõigus.

4.5. FUNKTSIOONI MONOTOONSUSE TUNNUSED

Kuulugu x_1 ja x_2 piirkonda X ning olgu $x_2 > x_1$. Meenutame punktist 1.3 definitsiooni 1.5: funktsioon $f(x)$ on piirkonnas X **monotoonne**, kui vahe $f(x_2) - f(x_1)$ säilitab märki. Kui $f(x_2) - f(x_1) \geq 0$, siis on $f(x)$ **monotoonselt kasvav**. Kui $f(x_2) - f(x_1) \leq 0$, siis on $f(x)$ **monotoonselt kahanev**.

Teoreem 4.4. Juhul $f'(a) > 0$ funktsioon $f(x)$ kasvab kohal a , juhul $f'(a) < 0$ kahaneb.

Tõestuseks lähtume tuletise definitsioonist 3.2 kohal a : $f'(a) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$.

Kui $f'(a) > 0$, siis $\frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x} > 0$. Kui $x_2 > x_1$ siis $\Delta x = x_2 - x_1 > 0$ ja seega $f(a + \Delta x) - f(a) > 0$ ning vastavalt definitsioonile 1.5 funktsioon $f(x)$ kasvab kohal a .

Teoreem 4.5. Diferentseeruv funktsioon $f(x)$ on vaadeldavas piirkonnas monotoonselt kasvav siis ja ainult siis, kui selles piirkonnas $f'(x) \geq 0$ (kahanev, kui $f'(x) \leq 0$).

Teoreemi 4.5 **tõestamisel** piirdume kasvamise vaatlemisega. Seejuures tuleb tõestada nii tingimuse $f'(x) \geq 0$ tarvilikkus kui ka piisavus.

Tingimuse $f'(x) \geq 0$ **tarvilikkus** tõestatakse vastuväiteliselt. Eeldame, et $f(x)$ on monotoonselt kasvav näitame, et siis $f'(x) \geq 0$. Kui leiduks koht a , mis kuulub piirkonda X ($a \in X$), kus $f'(a) < 0$, siis teoreemi 4.4 põhjal siin $f(x)$ kahaneks. See on aga vastuolus eeldusega, mistõttu on tingimuse $f'(x) \geq 0$ tarvilikkus tõestatud.

Tingimuse $f'(x) \geq 0$ piisavuse tõestamiseks eeldame (vastupidi tarvilikkuse tõestamisele), et $f'(x) \geq 0$ ja näitame, et siis $f(x)$ on monotoonselt kasvav. Tõepoolest, kui $x_2 > x_1$ on mingid punktid piirkonnas X , siis Lagrange'i keskvaartusvalemi (4.1) põhjal

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi) \cdot (x_2 - x_1), \quad x_1 < \xi < x_2. \quad (4.9)$$

Kuna eelduse järgi on $f'(\xi) \geq 0$, siis (4.9) võimaldab järeldada, et $f(x_2) - f(x_1) \geq 0$. Viimane võrratus aga ütleb vastavalt definitsioonile 1.5, et $f(x)$ on monotoonselt kasvav.

Märkus 4.3. Tarvilikud on tingimused, ilma milleta väide ei saa olla tõene. **Piisavad** on tingimused, mille täidetusel väide on tõene.

Näited konkreetsete funktsioonide kasvamis- ja kahanemiskiirkondade leidmise kohta on toodud järgmise punkti 4.6 lõpus komplekselt koos lokaalsete ekstreemumite analüüsiga (vt näiteid 4.10 – 4.13).

4.6. FUNKTSIOONI LOKAALSED EKSTREEMUMID

Olgu a mingi reaalarv ja olgu $\varepsilon > 0$.

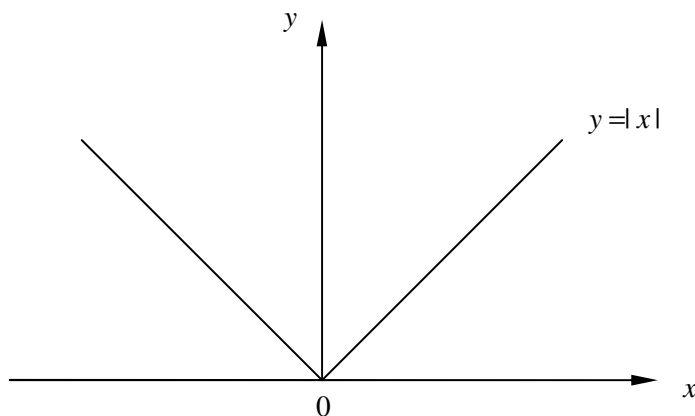
Definitsioon 4.2. Vahemikku $(a - \varepsilon; a + \varepsilon)$ nimetatakse punkti a (ehk arvu a) ümbruseks (täpsemalt ε -ümbruseks).

Vastavalt Fermat' teoreemile 4.3 **võib** diferentseeruv funktsioonil olla ekstreemum vaid statsionaarsetes punktides (kus tuletis $f' = 0$). Peale selle **võib** ekstreemum olla veel nendes punktides, kus funktsioon pole diferentseeruv (s.t kus tuletis f' katkeb).

Märkus 4.4. Reaalarvu a absoluutväärtuseks nimetatakse arvu $|a|$, mis rahuldab tingimust

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{kui } a \geq 0, \\ -a, & \text{kui } a < 0. \end{cases} \quad (4.10)$$

Näide 4.9. Absoluutväärtust $|x|$ sisaldav funktsioon $y = |x|$ ei ole kohal $x = 0$ diferentseeruv. Geomeetriliselt tähendab see seda, et kohal $x = 0$ ei ole üheselt määratud puutujat. Kuid sellest hoolimata on funktsioonil $y = |x|$ kohal $x = 0$ lokaalne miinimum, vt joonist 4.3.



Joonis 4.3. Funktsiooni $y = |x|$ graafik

Definitsioon 4.3. Funktsiooni $f(x)$ **kriitiline punkt** on niisugune määramispiirkonna punkt, kus $f'(x)=0$ või $f'(x)$ on katkev.

Teoreem 4.6. (Lokaalse ekstreemumi olemasolu tarvilik tingimus). Funktsioonil võib olla lokaalne ekstreemum vaid kriitilises punktis.

Teoreemi 4.6 tõestust pole toodud, kuid selle teoreemi sisu ja põhjendamise aluseid aitavad selgitada Fermat' teoreem 4.3 ja näide 4.9.

Teoreem 4.6 ütleb, et funktsioonil ei tarvitse olla ekstreemum igas kriitilises punktis. Seepärast on vaja lisaks tarvilikele tingimustele täiendavalt esitada **piisavad tingimused** ekstreemumi olemasoluks kriitilises punktis. Teoreemides 4.7 ja 4.8 formuleeritakse kaks ekstreemumi olemasolu piisavat tingimust. Neist esimene tingimus (teoreem 4.7) on üldisem ja käsitleb kõiki kriitilisi punkte. Teine tingimus (teoreem 4.8) on piiratum ja haarab kriitilistest punktidest vaid statsionaarseid punkte (statsionaarse punkti mõiste kohta vt definitsiooni 4.1).

Teoreem 4.7. (Lokaalse ekstreemumi olemasolu esimene piisav tingimus). Kui funktsioon $f(x)$ on pidev **kriitilises punktis** a , kusjuures a vasakpoolses ümbruses $f'(x) > 0$, parempoolses ümbruses aga $f'(x) < 0$, siis funktsioonil $f(x)$ on kohal a lokaalne maksimum. Kui a vasakpoolses ümbruses $f'(x) < 0$, parempoolses ümbruses aga $f'(x) > 0$, siis funktsioonil $f(x)$ on kohal a lokaalne miinimum.

Lühidalt võib öelda, et ekstreemum on, kui argumendi läbides punkti a muutub tuletisfunktsiooni $f'(x)$ märk.

Teoreemi 4.7 tõestus baseerub punkti 4.5 teoreemil 4.5.

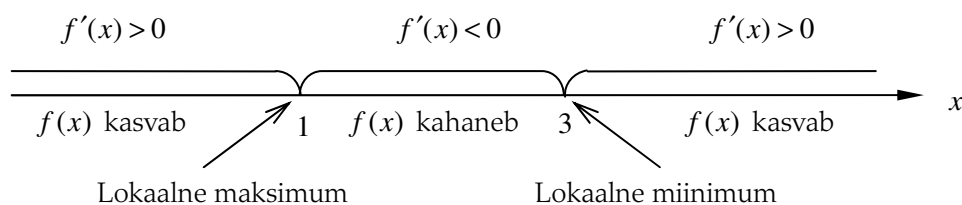
Teoreem 4.8. (Lokaalse ekstreemumi olemasolu teine piisav tingimus). Funktsioonil $f(x)$ on **statsionaarses punktis** a lokaalne maksimum, kui $f''(a) < 0$ ja miinimum, kui $f''(a) > 0$.

Tõestus. Statsionaarses punktis a on teatavasti $f'(a)=0$. Kui $f''(a)=[f'(a)]' < 0$, siis punkti 4.5 teoreemi 4.4 põhjal on tuletisfunktsioon $f'(x)$ punktis a kahanev. Järelikult leidub niisugune a vasakpoolne ümbrus, kus $f'(x) > f'(a)=0$ ja parempoolne ümbrus, kus $f'(x) < f'(a)=0$. Teoreemi 4.7 põhjal on funktsioonil $f(x)$ punktis a lokaalne maksimum. Teoreemi 4.8 miinimumiga seotud osa tõestatakse analoogselt.

Näide 4.10. Leida funktsiooni $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$ lokaalsed ekstreemumid ning kasvamis- ja kahanemispiirkonnad.

Kasutame kõigepealt lokaalse ekstreemumi olemasolu tarvilikku tingimust (teoreemi 4.6). Leiame kriitilised punktid. Selleks avaldame funktsiooni esimese tuletise $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$. Võrdsustame esimese tuletise nulliga $3x^2 - 12x + 9 = 0$ ehk $x^2 - 4x + 3 = 0$. Selle (ruut)võrrandi lahendid $x_1 = 3$ ja $x_2 = 1$ on statsionaarsed punktid (üldisemalt kriitilised punktid). Rohkem kriitilisi punkte ei ole, sest $f'(x)$ ei katke kusagil. Niisiis punktides $x_1 = 3$ ja $x_2 = 1$ võib (kuid ei tarvitse) olla lokaalne ekstreemum.

Järgnevalt kasutame lokaalse ekstreemumi olemasolu (esimest) piisavat tingimust (teoreemi 4.7). Analüüsi tehniliseks vormistamiseks on mitu võimalust. Kasutame siin graafilist meetodit. Kuna funktsiooni $f(x)$ määramispiirkond on $X = (-\infty; \infty)$, siis vaatleme kogu arvtelge. Kanname arvteljele kõik kriitilised punktid ja jaotame arvtelje nende punktide abil osadeks. Kuna näites 4.10 on kaks kriitilist punkti, siis jaotub arvtelg kolmeks osaks, vt joonist 4.4.



Joonis 4.4. Funktsiooni $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$ lokaalsed ekstreemumid ning kasvamis- ja kahanemiskiirkonnad

Hindame arvtelje kõigis kolmes osas esimese tuletise märki. Üldjuhul tekkivate võrratuste lahendamise asemel võib arvutada esimese tuletise väärtuse iga osapiirkonna mingis konkreetses punktis, näiteks:

- piirkonnas $(-\infty; 1)$ arvutame $f'(0) = 9$, mis tähendab, et selles piirkonnas on $f'(x) > 0$ ja järelikult selles piirkonnas $f(x)$ kasvab;
- piirkonnas $(1; 3)$ arvutame $f'(2) = 3 \cdot 2^2 - 12 \cdot 2 + 9 = -3$, mis tähendab, et selles piirkonnas on $f'(x) < 0$ ja järelikult selles piirkonnas $f(x)$ kahaneb;
- piirkonnas $(3; \infty)$ arvutame $f'(4) = 3 \cdot 4^2 - 12 \cdot 4 + 9 = 9$, mis tähendab, et selles piirkonnas on $f'(x) > 0$ ja järelikult selles piirkonnas $f(x)$ kasvab.

Vastavalt teoreemile 4.7 võib järeldada, et punktis $x = 1$ on funktsioonil lokaalne maksimum ning punktis $x = 3$ lokaalne miinimum, kusjuures

$$\max f(1) = 1^3 - 6 \cdot 1^2 + 9 \cdot 1 - 4 = 0 \quad \text{ja} \quad \min f(3) = 3^3 - 6 \cdot 3^2 + 9 \cdot 3 - 4 = -4.$$

Kuna punktid $x_1 = 3$ ja $x_2 = 1$ on statsionaarsed punktid, siis võib nendes ekstreemumi olemasolu kindlakstegemiseks kasutada ka teoreemi 4.8. Leiame funktsiooni teise tuletise $f''(x) = 6x - 12$ ja arvutame teise tuletise väärtuse statsionaarsetes punktides:

- $f''(1) = 6 \cdot 1 - 12 = -6 < 0$; kuna statsionaarses punktis $x = 1$ on teine tuletis negatiivne, siis järelikult on selles punktis lokaalne maksimum;
- $f''(3) = 6 \cdot 3 - 12 = 6 > 0$; kuna statsionaarses punktis $x = 3$ on teine tuletis positiivne, siis järelikult on selles punktis lokaalne miinimum.

Kui küsitakse ainult lokaalseid ekstreemumeid (ning kasvamis- ja kahanemiskiirkondade vastu huvi ei tunta) ning kriitilised punktid sisaldavad eranditult statsionaarseid punkte ja lisaks on funktsiooni teise tuletise leidmine tehniliselt lihtne, nii nagu see oli näites 4.10, siis võib lokaalse ekstreemumi olemasolu piisavatest tingimustest eelistada teoreemi 4.8.

Näide 4.11. Leida funktsiooni $f(x) = \ln \frac{x-1}{x-2}$ lokaalsed ekstreemumid.

Leiame esimese tuletise

$$f'(x) = \frac{x-2}{x-1} \cdot \frac{x-2-(x-1)}{(x-2)^2} = -\frac{1}{(x-1)(x-2)}.$$

Esimene tuletis ei võrdu ilmselt mitte kusagil nulliga. Esimene tuletis $f'(x)$ katkeb punktides $x_1 = 1$ ja $x_2 = 2$. Kuid kuna need punktid ei kuulu funktsiooni $f(x)$ määramiskiirkonda, siis kriitilisi punkte (vt definitsiooni 4.3) ei ole. Järelikult funktsioonil $f(x)$ puuduvad lokaalsed ekstreemumid.

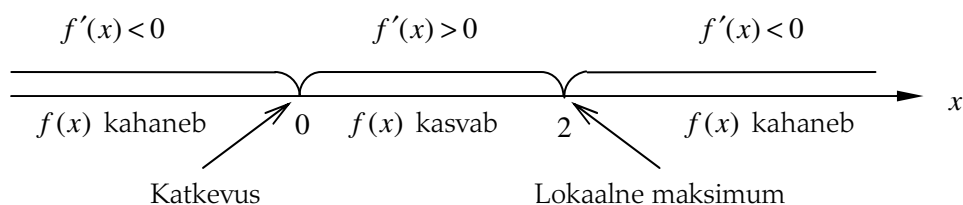
Näide 4.12. Leida funktsiooni $f(x) = \frac{2}{x} - \frac{2}{x^2}$ lokaalsed ekstreemumid ning kasvamis- ja kahanemiskiirkonnad.

Funktsioon $f(x)$ katkeb kohal $x_1 = 0$.

Arvutame esimese tuletise $f'(x) = -\frac{2}{x^2} + \frac{4}{x^3} = \frac{-2x+4}{x^3}$. Statsionaarsete punktide leidmiseks võrdsustame esimese tuletise nulliga $\frac{-2x+4}{x^3} = 0$, millest $-2x+4=0$ ja siit saame ühe statsionaarse punkti $x_2 = 2$.

Esimene tuletis $f'(x)$ katkeb punktis $x_1 = 0$, kuid kuna samas punktis katkeb ka funktsioon $f(x)$, siis see punkt ei kuulu kriitiliste punktide hulka. Küll aga tuleb funktsiooni $f(x)$ kasvamis- ja kahanemiskiirkondade leidmisel uurida tuletisfunktsiooni $f'(x)$ märki katkevuspunkti $x_1 = 0$ ümbruses. Pole välistatud, et katkevusest vasakul ja paremal käitub funktsioon erinevalt.

Kanname arvteljele katkevuspunkti $x_1 = 0$ ja statsionaarse punkti $x_2 = 2$ ning jaotame arvtelje nende punktide abil kolmeks osaks, vt joonist 4.5.



Joonis 4.5. Funktsiooni $f(x) = \frac{2}{x} - \frac{2}{x^2}$ lokaalsed ekstreemumid ning kasvamis- ja kahanemiskiirkonnad

Piirkondades $(-\infty; 0)$ ja $(2; \infty)$ on esimene tuletis negatiivne ning seega on funktsioon nendes piirkondades kahanev. Piirkonnas $(0; 2)$ on esimene tuletis positiivne ja järelikult seal funktsioon kasvab (teoreem 4.5). Punktis $x_2 = 2$ on vastavalt teoreemile 4.7 lokaalne maksimum, kusjuures

$$\max f(2) = \frac{2}{2} - \frac{2}{2^2} = \frac{1}{2}.$$

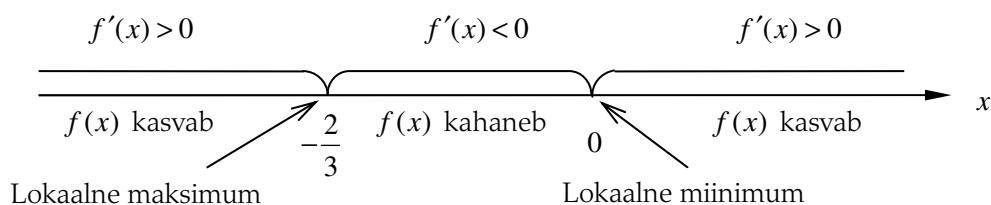
Näide 4.13. Leida funktsiooni $f(x) = \sqrt[3]{x^2} \cdot e^x$ lokaalsed ekstreemumid ning kasvamis- ja kahanemiskiirkonnad.

Funktsioon $f(x)$ on määratud iga x puhul (määramiskiirkond on $X = (-\infty; \infty)$).

Leiame esimese tuletise $f'(x) = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} \cdot e^x + x^{\frac{2}{3}} \cdot e^x = \frac{(2+3x) \cdot e^x}{3\sqrt[3]{x}}$ ja võrdsustame selle nulliga, millest

$2+3x=0$ ning viimasest võrrandist saame ühe statsionaarse punkti $x_1 = -\frac{2}{3}$. Tuletisfunktsioon $f'(x)$

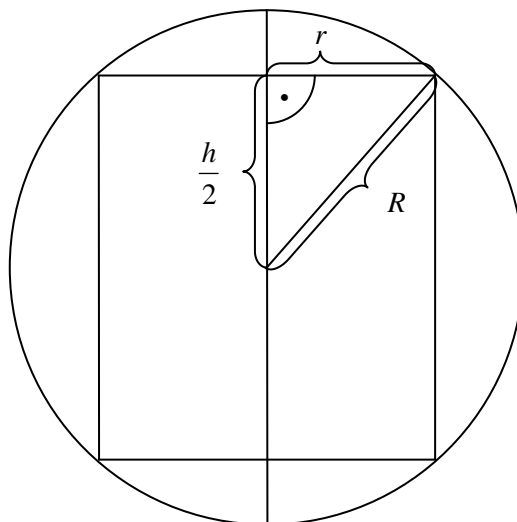
katkeb kohal $x_2 = 0$, kus funktsioon on määratud. Niisiis on kriitilisi punkte kaks: $x_1 = -\frac{2}{3}$, kus $f'(x)$ võrdub nulliga ning $x_2 = 0$, kus $f'(x)$ katkeb. Nendes punktides võib olla lokaalne ekstreemum. Edasi kasutame teoreemis 4.7 formuleeritud lokaalse ekstreemumi olemasolu piisavat tingimust. Vormistame analüüsi graafiliselt joonisel 4.6, jaotades arvtelje punktide $x_1 = -\frac{2}{3}$ ja $x_2 = 0$ abil kolmeks osaks.



Joonis 4.6. Funktsiooni $f(x) = \sqrt[3]{x^2} \cdot e^x$ lokaalsed ekstreemumid ning kasvamis- ja kahanemiskiirkonnad

Piirkondades $(-\infty; -2/3)$ ja $(0; \infty)$ on esimene tuletis positiivne ja nendes piirkondades funktsioon kasvab. Piirkonnas $(-2/3; 0)$ on esimene tuletis negatiivne ja seal funktsioon kahaneb. Punktis $x_1 = -\frac{2}{3}$ on lokaalne maksimum ja punktis $x_2 = 0$ on lokaalne miinimum, kusjuures $\max f(-2/3) \approx 0,3918$ ja $\min f(0) = 0$.

Näide 4.14. Leida kerasse kujundatud maksimaalse silindri mõõtmed, kui kera raadius on R .



Joonis 4.7. Kerasse raadiusega R kujundatud silinder raadiusega r ja kõrgusega h

Kuna silindri raadiuse ruut avaldub kujul $r^2 = R^2 - \frac{h^2}{4}$, vt joonist 4.7, siis saab silindri ruumala esitada ühest muutujast h sõltuva funktsioonina $V = \pi r^2 h = \pi \left(R^2 - \frac{h^2}{4} \right) h = \pi \left(R^2 h - \frac{h^3}{4} \right)$. Leiame selle

funktsiooni tuletise muutuja h järgi $\frac{dV}{dh} = \pi \left(R^2 - \frac{3h^2}{4} \right)$ ja võrdsustame tuletise nulliga: $\pi \left(R^2 - \frac{3h^2}{4} \right) = 0$.

Viimase võrrandi lahendamisel saame ühe statsionaarse punkti $h = \frac{2R}{\sqrt{3}}$. Ülesande sisust lähtuvalt võib ilma

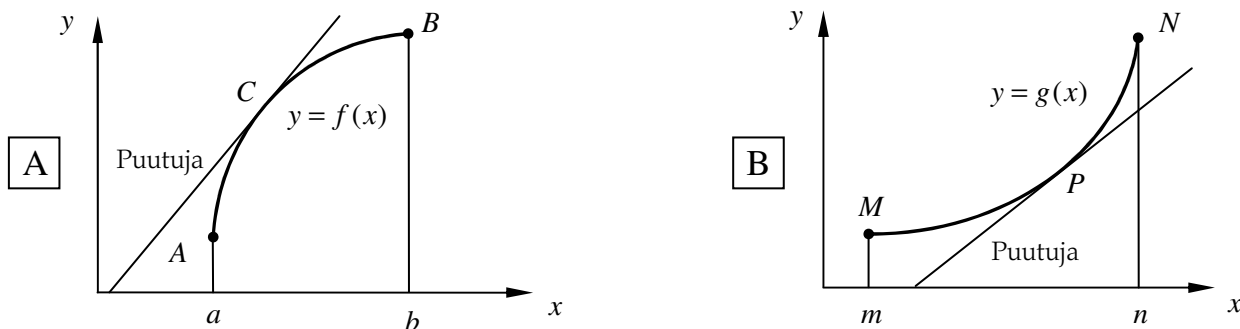
lokaalse ekstreemumi olemasolu piisavaid tingimusi kasutamata öelda, et $h = \frac{2R}{\sqrt{3}}$ on kerasse kujundatud

maksimaalse silindri kõrgus ning maksimaalse silindri raadius on $r = \sqrt{R^2 - \frac{h^2}{4}} = \sqrt{R^2 - \frac{4R^2}{3 \cdot 4}} = \sqrt{\frac{2}{3}} R$.

4.7. JOONE KUMERUS JA NÕGUSUS. KÄÄNUPUNKTID

Definitsioon 4.4. Joon $y = f(x)$ on vaadeldavas piirkonnas **kumer**, kui selle piirkonna igas punktis joone puutuja kulgeb ülalpool seda joont (kui allpool, siis joon on **nõgus**).

Joonisel 4.8.A on kujutatud lõigus $[a; b]$ kumerat joont $y = f(x)$ ning joonisel 4.8.B lõigus $[m; n]$ nõgusat joont $y = g(x)$.

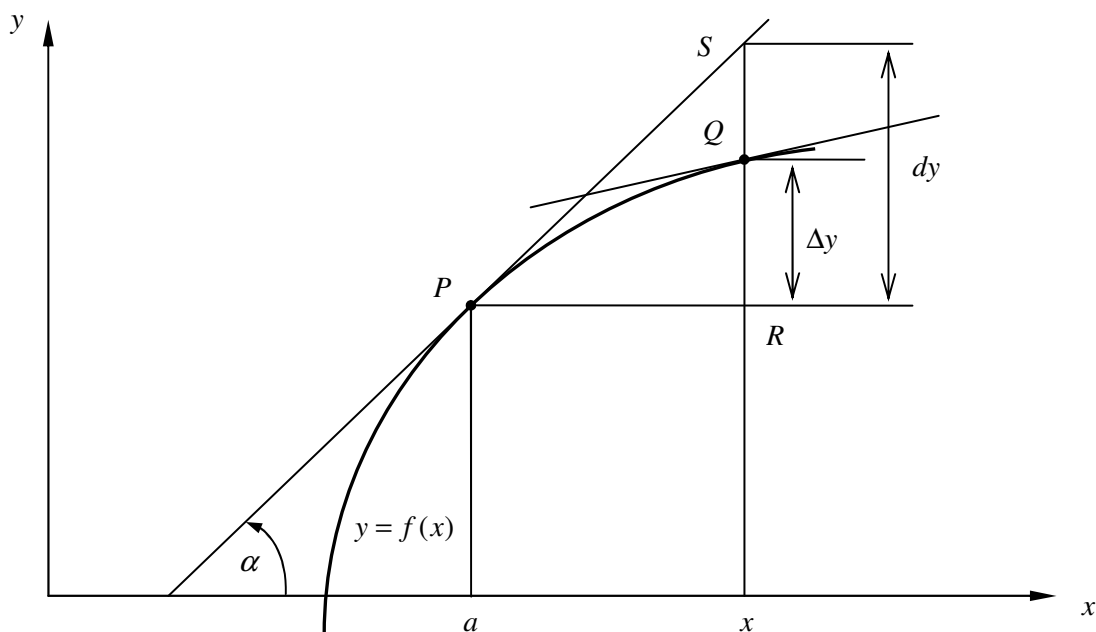


Joonis 4.8. A – kumer joon $y = f(x)$, B – nõgus joon $y = g(x)$

Teoreem 4.9. Joon $y = f(x)$ on kumer piirkonnas X siis ja ainult siis, kui tuletisfunktsioon $f'(x)$ monotoonselt kahaneb piirkonnas X (kui tuletisfunktsioon $f'(x)$ monotoonselt kasvab piirkonnas X , siis joon on nõgus).

Teoreemi 4.9 **tõestamisel** piirdume kumeruse vaatlemisega. Kumeruse puhul tuleb tõestada tuletisfunktsiooni $f'(x)$ monotoonse kahanemise tingimuse tarvilikkus ja piisavus.

Tuletisfunktsiooni $f'(x)$ monotoonse kahanemise tingimuse **tarvilikkuse tõestamisel** eeldame, et joon $y = f(x)$ on kumer ja näitame, et siis $f'(x)$ kahaneb monotoonselt, vt joonist 4.9.



Joonis 4.9. Kumera joone $y = f(x)$ puutujad punktides P ja Q

Joonisel 4.9 olev joon on kumer, sest $RQ < RS$ ehk teisiti $\Delta y < dy$. Viimane võrratus, mis ütleb, et funktsiooni muut on funktsiooni diferentsiaalst väiksem, avaldub detailsemalt kujul

$$f(x) - f(a) < f'(a) \cdot (x - a). \quad (4.11)$$

Et ka punktis Q joone $y = f(x)$ puutuja kulgeb ülalpool seda joont, siis jääb tingimus (4.11) kehtima, kui selles tingimuses paigutada a ja x omavahel ümber: $f(a) - f(x) < f'(x) \cdot (a - x)$ ehk

$$f'(x) \cdot (x - a) < f(x) - f(a). \quad (4.12)$$

Kui võrratuse (4.12) suuremale poolele kirjutada võrratusest (4.11) veel suurem avaldis, siis saadakse võrratus $f'(x) \cdot (x - a) < f'(a) \cdot (x - a)$, millest $x > a$ korral järeldub, et

$$f'(x) < f'(a). \quad (4.13)$$

Võrratus (4.13) ütleb, et $f'(x)$ kahaneb monotoonselt. Sellega on teoreemi 4.9 tingimuse tarvilikkus tõestatud.

Tuletisfunktsiooni $f'(x)$ monotoonse kahanemise tingimuse **piisavuse tõestamisel** eeldame, et $f'(x)$ kahaneb monotoonselt ja näitame, et joon $y = f(x)$ on siis kumer.

Lagrange' keskväärtusvalemi (4.1) põhjal võib kirjutada

$$f(x) - f(a) = f'(\xi) \cdot (x - a), \quad (a < \xi < x). \quad (4.14)$$

Et juhul $x > a$ ka $\xi > a$, siis $f'(x)$ kahanemise tõttu

$$f'(\xi) < f'(a). \quad (4.15)$$

Avaldame keskväärtusteoreemist (4.14) tuletise $f'(\xi) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ ja kirjutame selle võrratuse (4.15)

vasakule poolele. Tulemuseks on võrratus $\frac{f(x) - f(a)}{x - a} < f'(a)$, mille saab viia kujule (4.11):

$f(x) - f(a) < f'(a) \cdot (x - a)$. Võrratus (4.11) aga ütleb, et joon on kumer. Sellega oleme tõestanud teoreemi 4.9 tingimuse piisavuse. Märgive, et võrratuse (4.11) saab ka juhul kui võtta $x < a$.

Kuna tõestatud nii tarvilikkus kui ka piisavus, siis on teoreemi 4.9 kumerusega seotud osa täielikult tõestatud.

Geomeetriliselt tähendab teoreem 4.9, et joon $y = f(x)$ on vaadeldavas piirkonnas kumer siis ja ainult siis, kui puutuja tõusunurk α (joonis 4.9) monotoonselt kahaneb selles piirkonnas.

Järeldus 4.1. Teoreem 4.9 taandab joone $y = f(x)$ kumeruse uurimise tuletisfunktsiooni $f'(x)$ monotoonsuse uurimisele. Joon on kumer siis ja ainult siis, kui $f'(x)$ monotoonselt kahaneb, mis aga omakorda tähendab, et $f''(x) < 0$. Joon on nõgus siis ja ainult siis, kui $f'(x)$ monotoonselt kasvab, mis tähendab, et $f''(x) > 0$. Kokkuvõtvalt võib öelda, et joon $y = f(x)$ on vaadeldavas piirkonnas siis ja ainult siis

$$\text{kumer kui } f''(x) < 0, \quad (4.16)$$

$$\text{nõgus kui } f''(x) > 0. \quad (4.17)$$

Definitsioon 4.5. Punkti, mis eraldab pideva joone kumerat osa nõgusast, nimetatakse joone käänpunktiks.

Järeldus 4.2. Ühel pool käänpunkti tuletisfunktsioon $f'(x)$ kasvab, teisel pool aga kahaneb. Järelikult joone $y = f(x)$ käänpunktis on tuletisfunktsioonil $f'(x)$ lokaalne ekstreemum. Seega võivad joone $y = f(x)$ käänpunktideks olla vaid tuletisfunktsiooni $f'(x)$ kriitilised punktid, s.o punktid, kus teine tuletis $f''(x)$ võrdub nulliga või katkeb.

Niisiis on suur analoogia ühelt poolt kasvamis- ja kahenemispiirkondade ja lokaalsete ekstreemumite ning teiselt poolt kumeruse ja nõgususe ja käänpunktide leidmise vahel. Üsna sarnasel viisil analüüsitakse esimesel juhul põhiliselt esimese tuletise $f'(x)$ ning teisel juhul teise tuletise $f''(x)$ käitumist.

Näide 4.15. Leida joone $y = x^2 \ln x$ kumerus- ja nõgususpiirkonnad ning käänpunktid.

Vaadeldava funktsiooni määramispiirkond on $X = (0; \infty)$.

Leiame funktsiooni esimese ja teise tuletise

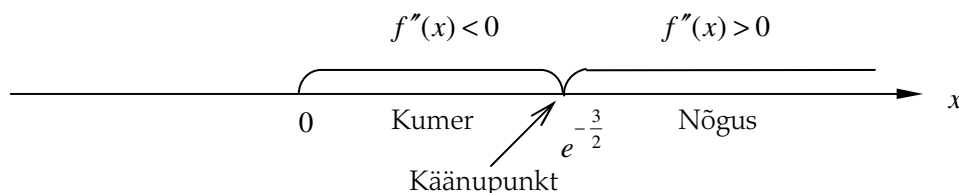
$$y' = f'(x) = 2x \ln x + x \text{ ja } y'' = f''(x) = 2 \ln x + 2x \cdot \frac{1}{x} + 1 = 2 \ln x + 3.$$

Võrdsustame teise tuletise nulliga ja lahendades saadud võrrandi, leiame tuletisfunktsiooni $f'(x)$ kriitilise punkti, kus vastavalt järeldusele 4.2 võib olla käänpunkt:

$$2 \ln x + 3 = 0, \text{ millest saame } x = e^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e^3}} \approx 0,223.$$

Analüüsime teise tuletise $f''(x)$ käitumist funktsiooni määramispiirkonnas $X = (0; \infty)$ (vt joonist 4.10) ning jaotame selle määramispiirkonna punkti $x = e^{-\frac{3}{2}}$ abil kaheks osaks $(0; e^{-\frac{3}{2}})$ ja $(e^{-\frac{3}{2}}; \infty)$. Hindame kummaski osapiirkonnas teise tuletise märki, arvutades teise tuletise väärtuse mõlema osapiirkonna ühes punktis, näiteks kohtadel $x = 0,1$ ja $x = 1$:

$$f''(0,1) = 2 \cdot \ln 0,1 + 3 \approx -1,605 < 0 \text{ ja } f''(1) = 2 \cdot \ln 1 + 3 = 3 > 0.$$



Joonis 4.10. Joone $y = x^2 \ln x$ kumerus- ja nõgususpiirkonnad ning käänpunktid

Niisiis on joon $y = x^2 \ln x$ vastavalt järeldusele 4.1 piirkonnas $(0; e^{-\frac{3}{2}})$ kumer ja piirkonnas $(e^{-\frac{3}{2}}; \infty)$ nõgus.

Kohal $x = e^{-\frac{3}{2}}$, kus joone kumerus läheb üle nõgususeks, on käänpunkt (definitsioon 4.5). Arvutame käänpunktis funktsiooni väärtuse $f\left(e^{-\frac{3}{2}}\right) = \frac{1}{e^3} \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) \cdot \ln e = -\frac{3}{2e^3}$.

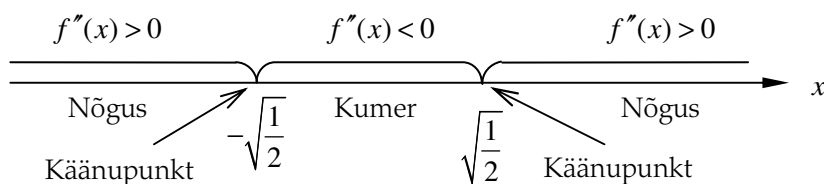
Näide 4.16. Leida joone $y = e^{-x^2}$ kumerus- ja nõgususpiirkonnad ning käänupunktid.

Leiame esimese tuletise $y' = f'(x) = e^{-x^2} \cdot (-2x) = -2x \cdot e^{-x^2}$

ja teise tuletise $y'' = f''(x) = -2e^{-x^2} - 2x \cdot e^{-x^2} \cdot (-2x) = 2e^{-x^2}(2x^2 - 1)$.

Võrdsustame teise tuletise nulliga ning kuna eksponentfunktsioon nulliga ei võrdu, siis saame $2x^2 - 1 = 0$.

Viimase võrrandi lahendid on $x_1 = \sqrt{\frac{1}{2}} \approx 0,707$ ja $x_2 = -\sqrt{\frac{1}{2}} \approx -0,707$, kus vastavalt järeldusele 4.2 võivad olla käänupunktid. Jaotame arvtelje nende punktide abil kolmeks ja hindame igas osas teise tuletise märki, selleks et vastavalt järeldusele 4.1 teha kindlaks kumerus- ja nõgususpiirkonnad. Kuna e^{-x^2} on iga x puhul positiivne, siis kasutame teise tuletise märgi hindamiseks avaldist $2x^2 - 1$. Analüüsi kokkuvõte on vormistatud joonisel 4.11.



Joonis 4.11. Joone $y = e^{-x^2}$ kumerus- ja nõgususpiirkonnad ning käänupunktid

Funktsiooni väärtus käänupunktides on $f\left(-\sqrt{\frac{1}{2}}\right) = f\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right) = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$.

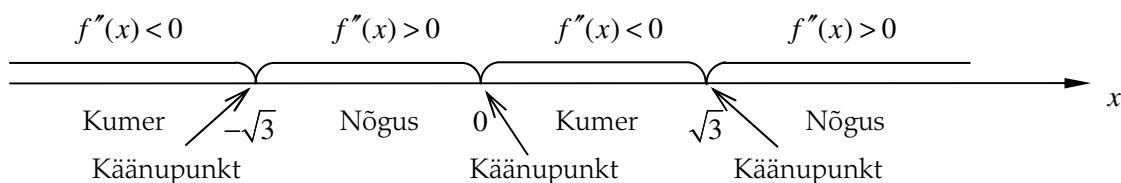
Näide 4.17. Leida joone $y = \frac{x}{1+x^2}$ kumerus- ja nõgususpiirkonnad ning käänupunktid.

Esimene tuletis $y' = f'(x) = \frac{1+x^2-2x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$

ja teine tuletis $y'' = f''(x) = \frac{-2x(1+x^2)^2 - (1-x^2)2(1+x^2)2x}{(1+x^2)^4} = \frac{-2x-2x^3-4x+4x^3}{(1+x^2)^3} = \frac{2x^3-6x}{(1+x^2)^3}$.

Võrdsustame teise tuletise nulliga $\frac{2x^3-6x}{(1+x^2)^3} = 0$, millest $2x^3-6x=0$ ehk $x(x^2-3)=0$.

Viimase võrrandi lahenditeks on $x_1 = 0$, $x_2 = \sqrt{3}$ ja $x_3 = -\sqrt{3}$, kus vastavalt järeldusele 4.2 võivad olla käänupunktid, vt joonis 4.12.



Joonis 4.12. Joone $y = \frac{x}{1+x^2}$ kumerus- ja nõgususpiirkonnad ning käänupunktid

4.8. JOONE ASÜMPTOODID

Definitsioon 4.6. Kui joone $y = f(x)$ punkti P kaugenemisel lõpmatusse punkti P kaugus teatavast sirgest läheneb piiramata nullile, siis seda sirget nimetatakse joone $y = f(x)$ **asümptoodiks**.

Asümptooti, mis ei ole risti x -teljega, nimetatakse **kaldasümptoodiks** ja tema võrrand on

$$y = kx + b. \quad (4.18)$$

On võimalik näidata, et sirge (4.18) parameetrid k ja b avalduvad piirväärtuste kujul:

$$k = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{x}, \quad (4.19)$$

$$b = \lim_{x \rightarrow a} [f(x) - kx], \quad (4.20)$$

kus $x \rightarrow +\infty$ või $x \rightarrow -\infty$. Kui $k = 0$, siis asümptoot on horisontaalne sirge $y = b$.

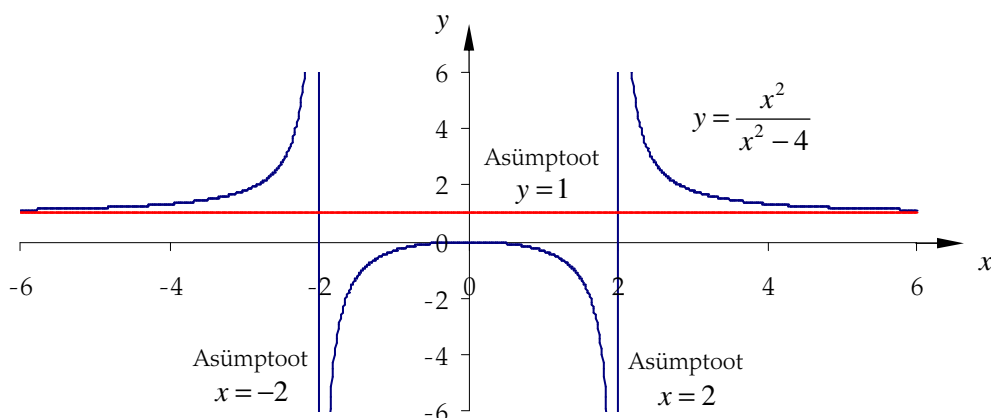
Kui sirge $x = a$ on joone $y = f(x)$ **püstasümptoodiks** punkti a parempoolses ümbruses, siis $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm\infty$, kui vasakpoolses ümbruses, siis $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \pm\infty$. Viimased kaks piirväärtust on ühepoolsed, vastavalt parempoolne ja vasakpoolne, vt definitsiooni 2.2.

Näide 4.18. Leida joone $y = \frac{x^2}{x^2 - 4}$ asümptoodid.

L'Hospitali reeglga arvutatavad piirväärtused (4.19) ja (4.20) on $k = \lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{x^2}{(x^2 - 4)x} = 0$ ja $b = \lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2 - 4} = 1$.

Järelikult on asümptoodiks (4.18) horisontaalne sirge $y = 1$, vt joonist 4.13.

Kuna $\lim_{\substack{x \rightarrow 2^+ \\ x \rightarrow -2^-}} \frac{x^2}{x^2 - 4} = +\infty$ ja $\lim_{\substack{x \rightarrow 2^- \\ x \rightarrow -2^+}} \frac{x^2}{x^2 - 4} = -\infty$, siis on püstasümptoote kaks: $x = -2$ ja $x = 2$, vt joonis 4.13.



Joonis 4.13. Joone $y = \frac{x^2}{x^2 - 4}$ graafik ning asümptoodid $y = 1$, $x = -2$ ja $x = 2$

4.9. FUNKTSIOONI UURIMISE JA GRAAFIKU KONSTRUEERIMISE ÜLDINE PLAAN

Punktides 4.3 kuni 4.8 on uuritud funktsiooni käitumist diferentsiaalarvutuse reeglite alusel. Toodud näited 4.7 kuni 4.18 olid aga seotud vaid selle uurimise ühe-kahe elemendiga: globaalsed ekstreemumid (punktis 4.4), monotoonsuse piirkonnad ja lokaalsed ekstreemumid (punktides 4.5 ja 4.6), kumerus, nõgusus ja käänupunktid (punktis 4.7), asümptootid (punktis 4.8). Järgnevates näidetes 4.19 ja 4.20 analüüsitakse funktsiooni komplekselt, tehes funktsiooni kohta nii-öelda „täieliku“ uurimise ja seades üheks eesmärgiks selle uurimise tulemuste põhjal funktsiooni graafiku joonestamise. Konkreetset juhul võib funktsiooni uurimise plaan mõnevõrra varieeruda, kuid aluseks võib võtta järgnevad soovitusel, võimalik et muutes analüüsi järjekorda.

1. Leida funktsiooni määramis- ja muutumispiirkond.
2. Leida nullkohad ning positiivsus- ja negatiivsuspiirkonnad.
3. Uurida sümmeetriat ja perioodilisust.
4. Leida funktsiooni katkevuspunktid ja uurida funktsiooni käitumist katkevuspunktide ümbruses.
5. Leida asümptootid.
6. Leida kasvamis- ja kahanemispiirkonnad ning lokaalsed ekstreemumid.
7. Leida kumerus- ja nõgususpiirkonnad ning käänupunktid.
8. Joonestada funktsiooni graafik, vajadusel arvutades täiendavalt funktsiooni väärtuse mõnes punktis.

Näide 4.19. Uurida funktsiooni $f(x) = x^2 e^{\frac{1}{x}}$ käitumist ja joonestada graafik.

Funktsioon $f(x)$ on määratud iga x puhul, välja arvatud null. Funktsiooni määramispiirkond on seega $X = \{(-\infty; 0), (0; \infty)\}$. Kohal $x = 0$ on katkevus.

Funktsiooni $y = f(x)$ muutumispiirkond on $Y = (0; \infty)$, s.t et funktsioon on kõikjal positiivne ja tema graafik on x -telje kohal.

Vastavalt definitsioonidele 1.2, 1.3 ja 1.4 võib kontrollida, et funktsioon pole paaris, paaritu ega perioodiline.

Uurime funktsiooni käitumist katkevuspunkti $x = 0$ ümbruses, arvutades seal ühepoolsed piirväärtused:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} x^2 e^{\frac{1}{x}} = 0 \text{ ja } \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 e^{\frac{1}{x}} = \lim_{(0 \cdot \infty) x \rightarrow 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\frac{1}{x^2} \cdot e^{\frac{1}{x}}}{-\frac{2}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{2}{x}} = \lim_{(0 \cdot \infty) x \rightarrow 0^+} \frac{-\frac{1}{x^2} \cdot e^{\frac{1}{x}}}{-\frac{2}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{2} = +\infty.$$

Vasakpoolne piirväärtus on vahetult arvutatav. Parempoolne piirväärtus on määramatus kujul $(0 \cdot \infty)$, mis tuleb esmalt vastavalt punkti 4.2 märkusele 4.2 teisendada määramatuseks $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$. Seejärel täituvad eeldused

L'Hospitali kasutamiseks, mida tuleb rakendada kaks korda järjesti. Parempoolse piirväärtuse arvutustulemus $+\infty$ ütleb, et kui läheneda kohale $x = 0$ paremalt, siis funktsiooni väärtused kasvavad tõkestamatult. Vastavalt punktile 4.8 tähendab see, et joone parempoolsel harul on püstasümptoot $x = 0$ (s.o y -telg).

Kontrollime kaldasümptootide (4.18) $y = kx + b$ olemasolu, arvutades vastavalt valemile (4.19)

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{x^2 e^{\frac{1}{x}}}{x} = \lim_{|x| \rightarrow \infty} x e^{\frac{1}{x}} = \infty.$$

Kuna piirväärtus puudub, siis kaldasümptooti ei ole.

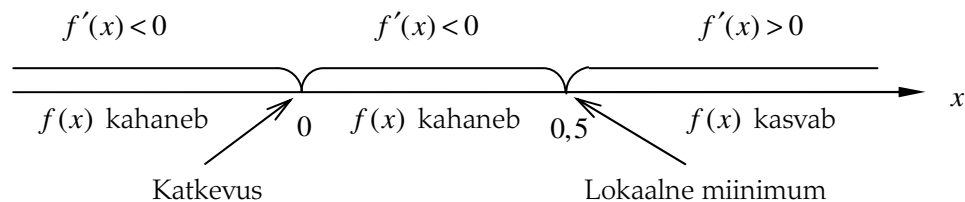
Leiame funktsiooni esimese ja teise tuletise

$$f'(x) = 2x \cdot e^{\frac{1}{x}} + x^2 \cdot e^{\frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = e^{\frac{1}{x}}(2x-1),$$

$$f''(x) = e^{\frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) \cdot (2x-1) + e^{\frac{1}{x}} \cdot 2 = \frac{2x^2 - 2x + 1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}.$$

Võrdsustame esimese tuletise nulliga $e^{\frac{1}{x}}(2x-1) = 0$, millest $2x-1=0$ ja saame ühe statsionaarse (üldisemalt öeldes kriitilise) punkti $x=0,5$, milles võib olla lokaalne ekstreemum. Punkt $x=0$, kus esimene tuletis katkeb, ei kuulu kriitiliste punktide hulka, sest seal katkeb ka funktsioon ise. Küll aga tuleb uurida esimese tuletise märki (s.o funktsiooni kasvamist ja kahanemist) katkevuspunkti $x=0$ ümbruses, sest pole välistatud, et funktsioon käitub mõlemal pool katkevuspunkti erinevalt (vt näidet 4.12).

Kanname arvteljele statsionaarse punkti $x=0,5$ ja katkevuspunkti $x=0$ ning jaotame arvtelje nende punktide abil kolmeks osaks, vt joonist 4.14.



Joonis 4.14. Funktsiooni $f(x) = x^2 e^{\frac{1}{x}}$ lokaalsed ekstreemumid ning kasvamis- ja kahanemiskiirkonnad

Jooniselt 4.14 on näha, et statsionaarses punktis $x=0,5$ on lokaalne miinimum. Arvutame selles punktis funktsiooni väärtuse $\min f(0,5) = 0,5^2 \cdot e^{0,5} \approx 1,847$.

Võrdsustame teise tuletise nulliga ja saame ruutvõrrandi $2x^2 - 2x + 1 = 0$. Kuna siit $x = \frac{2 \pm \sqrt{4-8}}{4}$, siis

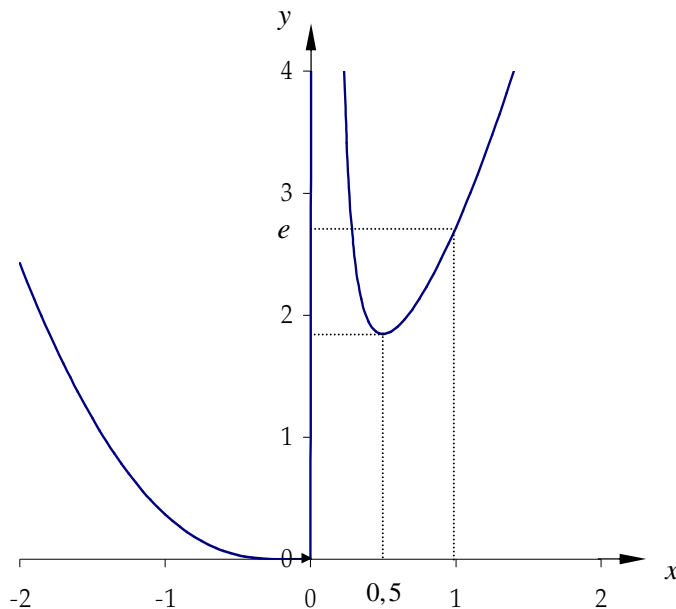
sellel ruutvõrrandil lahendid puuduvad. Siit järeldub, et joonel $y = x^2 e^{\frac{1}{x}}$ käänupunkte ei ole. Joone kumeruse ja nõgususe kindlakstegemiseks hindame teise tuletise märki katkevusest $x=0$ vasakul ja paremal, näiteks punktides $x=-2$ ja $x=3$. Saame $f''(-2) > 0$ ja $f''(3) > 0$, mis tähendab, et joon on vastavalt tingimusele (4.18) kogu ulatuses nõgus.

Joonisel 4.15 oleva funktsiooni graafiku täpsemaks skitseerimiseks arvutame täiendavalt funktsiooni väärtuse kolmes punktis:

$$\text{kui } x = -2, \text{ siis } f(-2) = \frac{4}{\sqrt{e}} \approx 2,426,$$

$$\text{kui } x = -1, \text{ siis } f(-1) = \frac{1}{e} \approx 0,368,$$

$$\text{kui } x = 1, \text{ siis } f(1) = e \approx 2,718.$$



Joonis 4.15. Joone $y = x^2 e^{\frac{1}{x}}$ graafik

Näide 4.20. Uurida funktsiooni $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt[3]{x^3 - 4}}$ käitumist ja joonestada graafik.

Funktsioon $f(x)$ on määratud iga x puhul, välja arvatud kui $x^3 - 4 = 0$. Viimase võrrandi lahendamisel saame katkevuspunkti $x = \sqrt[3]{4}$. Funktsiooni määramispiirkond on seega $X = \{(-\infty; \sqrt[3]{4}), (\sqrt[3]{4}; \infty)\}$. Funktsiooni $y = f(x)$ muutumispiirkond on $Y = (-\infty; \infty)$.

Definitsioonides 1.2, 1.3 ja 1.4 toodud eeskirjade alusel võib näidata, et funktsioon $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt[3]{x^3 - 4}}$ pole paaris, paaritu ega perioodiline.

Uurime funktsiooni käitumist katkevuspunkti $x = \sqrt[3]{4}$ ümbruses ja arvutame seal ühepoolsed piirväärtused:

$$\lim_{x \rightarrow \sqrt[3]{4}^-} \frac{x^2}{\sqrt[3]{x^3 - 4}} = -\infty \text{ ja } \lim_{x \rightarrow \sqrt[3]{4}^+} \frac{x^2}{\sqrt[3]{x^3 - 4}} = +\infty.$$

Tulemused ütlevad, et kohal $x = \sqrt[3]{4}$ on püstasümptoot, kusjuures joone vasakpoolne haru läheneb miinus lõpmatusele ning parempoolne haru pluss lõpmatusele.

Kaldasümptootide (4.18) $y = kx + b$ leidmiseks arvutame vastavalt valemitele (4.19) ja (4.20) piirväärtused

$$k = \lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x \cdot \sqrt[3]{x^3 - 4}} = \lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{x}{\sqrt[3]{x^3 - 4}} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \dots = 1,$$

$$b = \lim_{|x| \rightarrow \infty} [f(x) - kx] = \lim_{|x| \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2}{\sqrt[3]{x^3 - 4}} - x \right) \stackrel{(\infty - \infty)}{=} \lim_{|x| \rightarrow \infty} x \left(\frac{x}{\sqrt[3]{x^3 - 4}} - 1 \right) \stackrel{(\infty \cdot 0)}{=} \lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{\frac{x}{\sqrt[3]{x^3 - 4}} - 1}{\frac{1}{x}} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \dots = 0.$$

Parameetri k arvutamisel on määramatusest $\frac{\infty}{\infty}$ lahtisaamiseks kaks võimalust, kas jagada lugeja ja nimetaja x -ga või kasutada L'Hospitali reeglit (teoreemi 4.2). Parameetri b arvutamine on tehniliselt keeruline. Esialgne määramatus $\infty - \infty$ tuleb kõigepealt teisendada määramatuseks $\infty \cdot 0$ ja siis määramatuseks $\frac{0}{0}$. Need teisendused on eelnevas tehtud, misjärel saab kasutada L'Hospitali reeglit.

Niisiis saame vastavalt valemile (4.18) ühe kaldasümptoodi $y = x$.

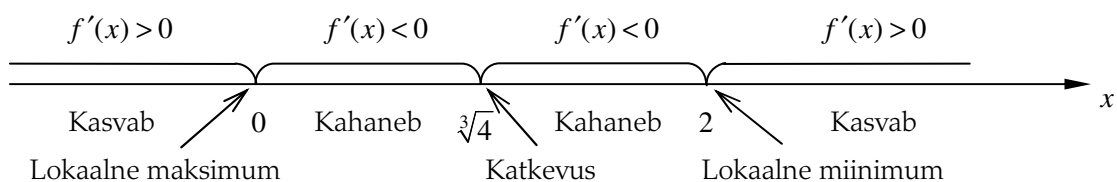
Funktsiooni esimese ja teise tuletise leidmisel kasutatakse jagatise tuletise valemit (3.8):

$$f'(x) = \frac{2x \cdot (x^3 - 4)^{\frac{1}{3}} - x^2 \cdot \frac{1}{3} (x^3 - 4)^{-\frac{2}{3}} \cdot 3x^2}{(x^3 - 4)^{\frac{2}{3}}} = \frac{2x \cdot (x^3 - 4) - x^4}{(x^3 - 4)^{\frac{2}{3}} \cdot (x^3 - 4)^{\frac{2}{3}}} = \frac{x^4 - 8x}{(x^3 - 4)^{\frac{4}{3}}},$$

$$f''(x) = \frac{(4x^3 - 8) \cdot (x^3 - 4)^{\frac{4}{3}} - (x^4 - 8x) \cdot \frac{4}{3} \cdot (x^3 - 4)^{\frac{1}{3}} \cdot 3x^2}{(x^3 - 4)^{\frac{8}{3}}} = \frac{(4x^3 - 8) \cdot (x^3 - 4) - (x^4 - 8x) \cdot 4x^2}{(x^3 - 4)^{\frac{7}{3}}} =$$

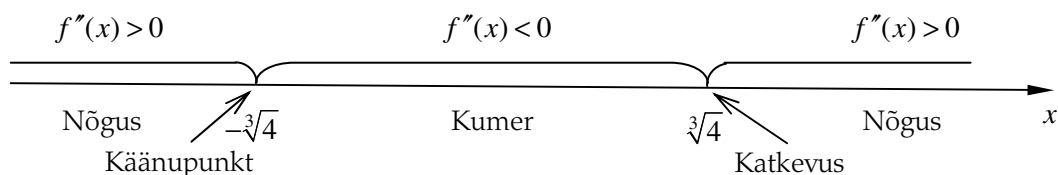
$$= \frac{4x^6 - 16x^3 - 8x^3 + 32 - 4x^6 + 32x^3}{(x^3 - 4)^{\frac{7}{3}}} = \frac{8x^3 + 32}{(x^3 - 4)^{\frac{7}{3}}}.$$

Võrdsustades esimese tuletise nulliga, saab võrrandi $x^4 - 8x = 0$ ehk $x(x^3 - 8) = 0$, mille lahendamine annab kaks statsionaarset punkti $x = 0$ ja $x = 2$. Kanname need punktid arvteljele ja samuti punkti $x = \sqrt[3]{4} \approx 1,587$, kus katkevad nii esimene tuletis kui ka funktsioon ise. Funktsiooni monotoonsuse piirkondade kindlakstegemiseks hindame arvtelje igas osas esimese tuletise märki. Analüüsi tulemused on vormistatud joonisel 4.16.



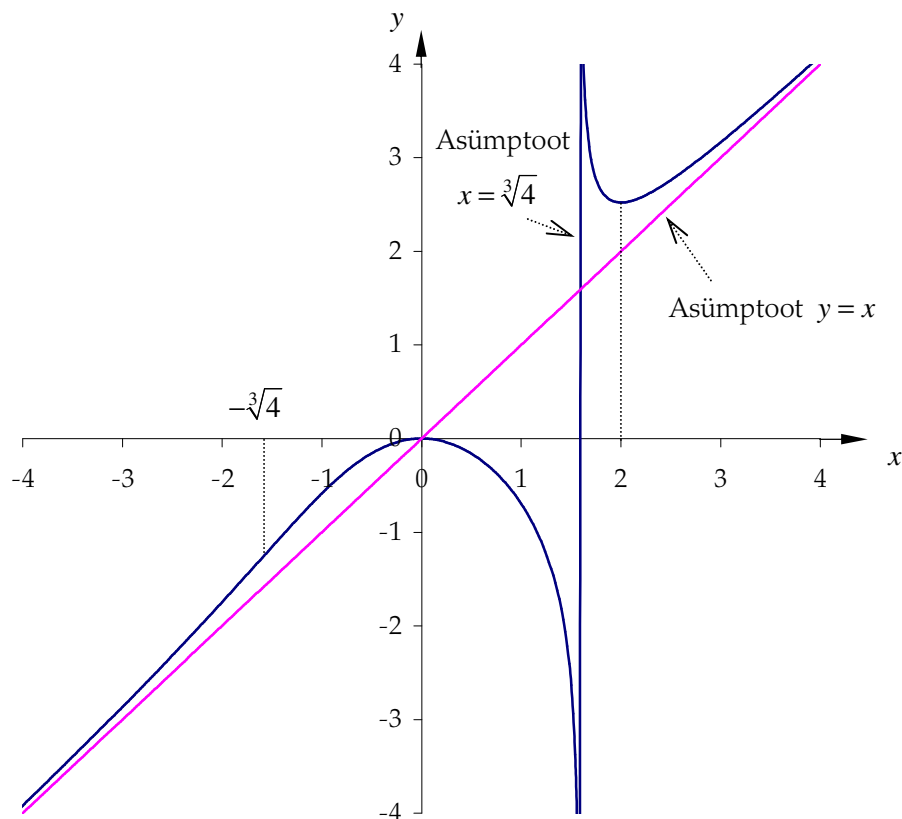
Joonis 4.16. Funktsiooni $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt[3]{x^3 - 4}}$ lokaalsed ekstreemumid ning kasvamis- ja kahanemispiirkonnad

Teise tuletise nulliga võrdsustamisel saab võrrandi $8x^3 + 32 = 0$, millest leiame punkti $x = -\sqrt[3]{4} \approx -1,587$, kus võib olla käänupunkt. Funktsiooni kumerus- ja nõguspiirkondade ja käänupunktide uuring on joonisel 4.17.



Joonis 4.17. Joone $y = \frac{x^2}{\sqrt[3]{x^3 - 4}}$ kumerus- ja nõguspiirkonnad ning käänupunktid

Uurimise tulemuste põhjal on konstrueeritud joonisel 4.18 olev funktsiooni $y = \frac{x^2}{\sqrt[3]{x^3 - 4}}$ graafik. Ühtlasi on joonisel 4.18 kujutatud kaldasümptoot $y = x$ ja püstasümptoot $x = \sqrt[3]{4}$.



Joonis 4.18. Joone $y = \frac{x^2}{\sqrt[3]{x^3 - 4}}$ graafik ning kaldasümptoot $y = x$ ja püstasümptoot $x = \sqrt[3]{4}$

4.10. TAYLORI VALEM

Punktis 3.9 on käsitletud diferentsiaali kasutamist ligikaudsetes arvutustes. Seal on analüüsitud, et kui argumendi muut Δx on suhteliselt väike, siis võib funktsiooni muudu Δy ja funktsiooni diferentsiaali dy lugeda ligikaudu võrdseteks: $\Delta y \approx dy$ (seos (3.22)). Seosest (3.22) järeldots ligikaudne võrdus (3.24):

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x.$$

Võtame selles ligikaudses võrduses $x = a$ ja saame

$$\underbrace{f(a + \Delta x)}_x \approx f(a) + f'(a) \cdot \underbrace{\Delta x}_{x - a}. \quad (4.21)$$

Märgime $a + \Delta x = x$ ja avaldame siit $\Delta x = x - a$. Seejärel võime (4.21) kirjutada kujul

$$f(x) \approx f(a) + f'(a) \cdot (x - a). \quad (4.22)$$

Seoses (4.22) on ligikaudsuse märgist paremal pool kaks liidetavat, millest teine liidetav, s.o $f'(a) \cdot (x-a)$ sisaldab esimest tuletist. Kasutades kõrgemat järku tuletisi, on võimalik seost (4.22) täpsustada ja üldistada. Selle üldistuse teoreetiline põhjendamine eeldab aga lõpmatult kahanevate suuruste detailsemat käsitletu, kui seda on tehtud käesoleva õppevahendi punktides 2.2 ja 2.4. Seetõttu väidame siinkohal ilma tõestamata, et seose (4.22) järgmine parandusliige avaldub kujul $\frac{1}{2} f''(a) \cdot (x-a)^2$ ja täpsustatud ligikaudne võrdus on

$$f(x) \approx f(a) + f'(a) \cdot (x-a) + \frac{1}{2} f''(a) \cdot (x-a)^2. \quad (4.23)$$

Edasine parandusliige sisaldab kolmandat järku tuletist ja avaldise $x-a$ kolmandat astet. Üldistusena saadakse **Taylori valem**, mille lõppu lisame **jääkliikme** R_n , mis võimaldab eelnevates seostes esinenud ligikaudsuse märgi asendada võrdusmärgiga:

$$f(x) = f(a) + f'(a) \cdot (x-a) + \frac{1}{2!} f''(a) \cdot (x-a)^2 + \frac{1}{3!} f'''(a) \cdot (x-a)^3 + \dots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(a) \cdot (x-a)^n + R_n. \quad (4.24)$$

Parandusliikmed alates järjenumbrist $n+1$ sisalduvad jääkliikmes R_n , kusjuures selle jääkliikme panust on võimalik ligikaudselt hinnata (vt allpool valemeid (4.29) ja (4.30)).

Sümbol $n!$ märgib faktoriaali, mis arvutatakse kujul $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$ (näiteks $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$, kusjuures eraldi defineeritakse $0! \equiv 1$).

Valemis (4.24) moodustavad jääkliikmele R_n eelnevad liikmed Taylori polünoomi, mille tähistame kujul $P_n(x)$. Siis on (4.24) lühidalt

$$f(x) = P_n(x) + R_n. \quad (4.25)$$

Summa sümboli abil võib kirjutada Taylori valemi (4.24) kompaktsel kujul

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} f^{(k)}(a) \cdot (x-a)^k + R_n. \quad (4.26)$$

Kui Taylori valemis (4.24) võtta $a=0$, siis saadakse selle valemi praktikas sageli kasutatav erijuht, mis kannab **Maclaurin'i valemi** nime:

$$f(x) = f(0) + f'(0) \cdot x + \frac{1}{2!} f''(0) \cdot x^2 + \frac{1}{3!} f'''(0) \cdot x^3 + \dots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(0) \cdot x^n + R_n \quad (4.27)$$

ehk summa sümboli abil lühemalt

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} f^{(k)}(0) \cdot x^k + R_n. \quad (4.28)$$

Põhjalikum analüüs näitab, et Taylori valemi (4.24) (või (4.26)) jääkliiget R_n on võimalik ligikaudselt hinnata

kas Lagrange'i kujul
$$R_n = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \cdot (x-a)^{n+1}, \text{ kus } a < \xi < x \quad (4.29)$$

või Cauchy kujul
$$R_n = \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(\xi) \cdot (x-\xi)^n \cdot (x-a), \text{ kus } a < \xi < x. \quad (4.30)$$

Näide 4.21. Leida funktsioon $f(x) = e^x$ Taylori polünoom vastavalt Maclaurin'i valemile (4.27).

Leiame funktsiooni $f(x) = e^x$ tuletised ja arvutame tuletiste väärtused punktis $x = 0$:

$$\begin{array}{ll} f(x) = e^x & f(0) = 1 \\ f'(x) = e^x & f'(0) = 1 \\ f''(x) = e^x & f''(0) = 1 \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ f^{(n)}(x) = e^x & f^{(n)}(0) = 1 \end{array}$$

Arvestades eelnevat, saame vastavalt Maclaurin'i valemile (4.27)

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + R_n. \quad (4.31)$$

Jääkliige avaldub valemi (4.29) kohaselt

$$R_n = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^\xi, \text{ kus } 0 < \xi < x. \quad (4.32)$$

Kui näiteks võtta $n = 8$ ja $x = 1$, siis on $0 < \xi < 1$. Seega $e^\xi < e \approx 2,718 < 3$ ja vastavalt valemile (4.32) saame hinnata jääkliikme suurust: $R_8 < \frac{3}{9!} < 0,000009$. Valemiga (4.31) arvutame e ligikaudse arvulise väärtuse

$$e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{8!} \approx 2,718279 \pm 0,000009. \quad (4.33)$$

Arv e oli teatavasti defineeritud piirväärtuse $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ kujul, vt punkti 2.5 valemit (2.8).

Valemiga (4.31) oleme siin andnud meetodi irratsionaalarvu e arvutamiseks kuitahes suure täpsusega. Seosesse (4.33) on hõlpus lisada täiendavaid liidetavaid ja niimoodi tõsta tulemuse täpsust. Kasutatud arvutuseeskiri on lihtsalt programmeeritav, mistõttu käesolevas punktis 4.10 toodud Taylori valemi rakendusi kasutatakse väga laialdaselt arvutusmatemaatikas ja kaasaegsetes infotehnoloogiavahendites realiseeritud arvutusalgoritmides.

Näide 4.22. Leida funktsioon $f(x) = \sin x$ Taylori polünoom vastavalt Maclaurin'i valemile (4.27).

Leiame funktsiooni $f(x) = \sin x$ tuletised ja arvutame tuletiste väärtused punktis $x = 0$:

$$\begin{array}{ll} f(x) = \sin x & f(0) = 0 \\ f'(x) = \cos x = \sin(x + \pi / 2) & f'(0) = 1 \\ f''(x) = -\sin x = \sin(x + 2 \cdot \pi / 2) & f''(0) = 0 \\ f'''(x) = -\cos x = \sin(x + 3 \cdot \pi / 2) & f'''(0) = -1 \\ f^{(4)}(x) = \sin x = \sin(x + 4 \cdot \pi / 2) & f^{(4)}(0) = 0 \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ f^{(n)}(x) = \sin(x + n \cdot \pi / 2) & f^{(n)}(0) = \sin(n \cdot \pi / 2) \end{array}$$

Arvestades eelnevat, saame funktsiooni $f(x) = \sin x$ Taylori polünoomis vastavalt Maclaurin'i valemile (4.27) vahelduvate märkidega summa, mis sisaldab vaid argumendi x paarituid astmeid:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + R_n. \quad (4.34)$$

Märkides $n = 2p$, saab jääkliikme (4.29) esitada kujul

$$R_{2p} = \frac{(-1)^p x^{2p+1}}{(2p+1)!} \sin \left[\xi + (2p+1) \cdot \frac{\pi}{2} \right]. \quad (4.35)$$

Arvutame $\sin 20^\circ$, võttes summas (4.34) vaid kaks esimest liidetavat:

$$\sin 20^\circ = \sin \frac{\pi}{9} \approx \frac{\pi}{9} - \frac{1}{3!} \left(\frac{\pi}{9} \right)^3 \approx 0,3420.$$

Jääkliikme absoluutväärtus on vastavalt valemile (4.35)

$$|R_4| = \frac{1}{5!} \left(\frac{\pi}{9} \right)^5 \sin \left(\xi + 5 \cdot \frac{\pi}{2} \right) \leq \frac{1}{5!} \left(\frac{\pi}{9} \right)^5 \approx 0,000044 < 0,00005.$$

Seega $\sin 20^\circ = 0,3420 \pm 0,00005$. Nagu tulemusest näha, võimaldas valemis (4.34) vaid kahe esimese liidetavaga piirdumine saada vastuses neli õiget kohta peale koma.

Märkus 4.5. Funktsiooni $f(x) = \cos x$ Taylori polünoom vastavalt Maclaurin'i valemile (4.27) annab tulemuseks vahelduvate märkidega summa, mis sisaldab vaid argumendi x paarisastmeid:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + R_n.$$

Märkus 4.6. Funktsiooni $f(x) = (1+x)^\alpha$ Taylori polünoom vastavalt Maclaurin'i valemile (4.27) avaldub kujul

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + R_n.$$

Märkus 4.7. Funktsiooni $f(x) = \ln(1+x)$ Taylori polünoom vastavalt Maclaurin'i valemile (4.27) avaldub kujul

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^n}{n} + R_n.$$

5. MITME MUUTUJA FUNKTSIOONI DIFERENTSIAALARVUTUS

5.1. MITME MUUTUJA FUNKTSIOONI MÕISTE JA MÄÄRAMISPIIRKOND

Definitsioon 5.1. n reaalarvust koosnevat süsteemi $(x_1, x_2, \dots, x_n) = P$ nimetatakse n -mõõtmeliseks punktiks P ja arve x_1, x_2, \dots, x_n punkti P koordinaatideks.

Definitsioon 5.2. Kõigi võimalike n -mõõtmeliste punktide hulka nimetatakse n -mõõtmeliseks eukleidiliseks ruumiks \mathbb{R}^n , kui selles ruumis iga kahe punkti $A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ ja $B = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ vaheline kaugus on defineeritud valemiga

$$d(A, B) = |\overline{AB}| = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + \dots + (a_n - b_n)^2}. \quad (5.1)$$

Definitsioon 5.3. Kui hulga $D \subset \mathbb{R}^n$ igale punktile $P = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ on seatud üheselt vastavusse arv z , siis öeldakse, et z on muutujate x_1, x_2, \dots, x_n funktsioon:

$$z = f(x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (5.2)$$

Märkus 5.1. Sümbol \subset tähendab „sisaldub“. Definitsiooni 5.3 algus on niisiis: kui hulga D , mis sisaldub hulgas \mathbb{R}^n igale punktile ... jne.

Hulka D nimetatakse funktsiooni f **määramispiirkonnaks**.

Juhis 5.1. Kui funktsiooni f määramispiirkond D ei ole ette antud, siis loetakse sinna kuuluvateks kõik need punktid P , mille korral vastavus $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ omab mõtet, s.t mille puhul avaldisel $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ on kindel reaalarvuline väärtus.

Kahe muutuja funktsiooni määramispiirkond on teatud punktide hulk tasandil, kolme muutuja funktsiooni määramispiirkond on teatud ruumipunktide hulk. Nelja ja enama muutuja funktsiooni määramispiirkonnal ei ole geomeetrist tõlgendust.

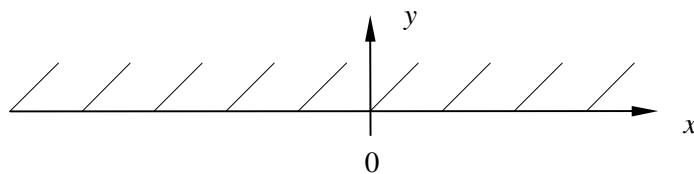
Käesolevas peatükis vaadeldakse põhiliselt kahe muutuja funktsioone $z = f(x, y)$, vähem kolme muutuja funktsioone $w = f(x, y, z)$. Kui argumente on paar-kolm, siis tähistatakse need järgnevas ilma indeksita tähtedega. Üleminek ühe muutuja funktsiooni teorialt kahe muutuja funktsiooni teorialle on seotud põhimõteteliste probleemidega, kuid edasine üldistus kolme, nelja jne muutuja funktsioonidele on suuresti tehniline küsimus.

Näide 5.1. Leida kahe muutuja funktsiooni $z = x + \sqrt{y}$ määramispiirkond.

Argument x võib omandada suvalisi väärtusi, kuid ruutjuure all olev argument y peab olema mittenegatiivne:

$$\begin{cases} -\infty < x < \infty, \\ y \geq 0. \end{cases} \quad (5.3)$$

Võrratussüsteemi (5.3) kujul esitatud funktsiooni $z = x + \sqrt{y}$ määramispiirkond on geomeetriselt x -telje kohale jääv pooltasand, x -telg ise kaasa arvatud. Joonisel 5.1 on vastav piirkond viirutatud.



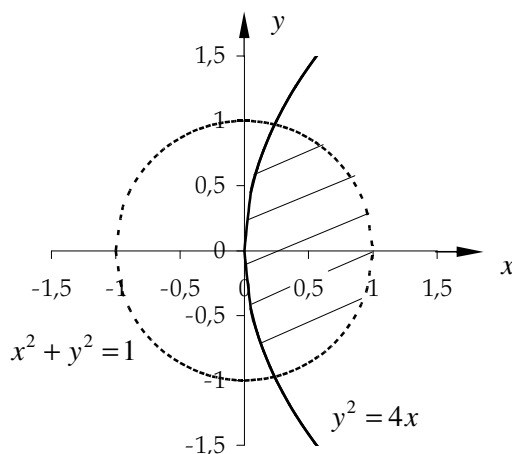
Joonis 5.1. Funktsiooni $z = x + \sqrt{y}$ määramispiirkond

Näide 5.2. Leida kahe muutuva funktsiooni $z = \frac{\sqrt{4x - y^2}}{\ln(1 - x^2 - y^2)}$ määramispiirkond.

Lähtume juhised 5.1. Üheaegselt tuleb täita kolm tingimust

$$\begin{cases} 4x - y^2 \geq 0, \\ 1 - x^2 - y^2 > 0, \\ \ln(1 - x^2 - y^2) \neq 0, \end{cases}$$

millest esimeses nõutakse ruutjuure aluse avaldise mittenegatiivsust, teises logaritmi argumendi positiivsust ning kolmandas nimetaja erinevust nullist. Teise võrratuse võib esitada kujul $x^2 + y^2 < 1$. Selle võrratuse piirjuhul $x^2 + y^2 = 1$ on ringjoone võrrand. Võrratus ise aga $x^2 + y^2 < 1$ esitab geomeetriselt ringjoonega $x^2 + y^2 = 1$ piiratud kujundi sisepiirkonda, kusjuures ringjoone enda punktid on sellest piirkonnast välja arvatud (viimast asjaolu sümboliseerib joonisel 5.2 katkendjoonega ringjoon). Esimese võrratuse piirjuhul $y^2 = 4x$ on parabool. Võrratus $4x - y^2 \geq 0$ esitab piirkonda, mis jääb joonest $y^2 = 4x$ paremale (seda võib kontrollida näiteks sellega, et punkti $(1; 0)$ koordinaadid rahuldavad võrratust $4x - y^2 \geq 0$, aga punkti $(-1; 0)$ koordinaadid mitte). Parabool $y^2 = 4x$ on joonisel 5.2 pideva joonega, sest tema punktid rahuldavad võrratust $4x - y^2 \geq 0$. Kolmanda tingimusega ekvivalentne tingimus on $1 - x^2 - y^2 \neq 0$, millest järeldub, et $x \neq 0$ ja $y \neq 0$. See tähendab, et koordinaatide alguspunkt jääb funktsiooni määramispiirkonnast välja.



Joonis 5.2. Funktsiooni $z = \frac{\sqrt{4x - y^2}}{\ln(1 - x^2 - y^2)}$ määramispiirkond

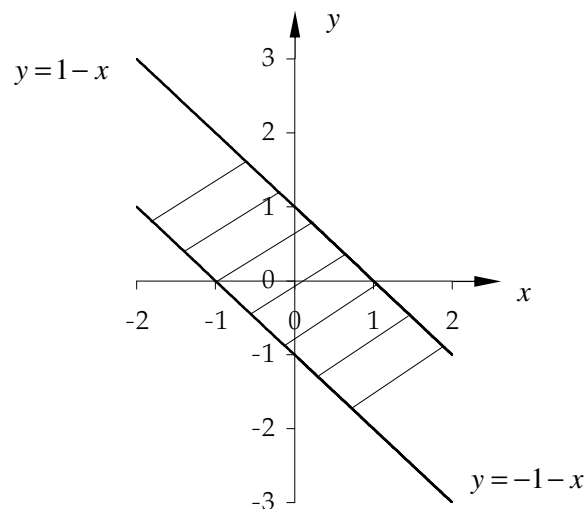
Funktsiooni $z = \frac{\sqrt{4x - y^2}}{\ln(1 - x^2 - y^2)}$ määramispiirkond on joonisel 5.2 viirutatud, kusjuures parabooli punktid kuuluvad määramispiirkonda (välja arvatud koordinaatide alguspunkt), ringjoone punktid aga jäävad määramispiirkonnast välja.

Näide 5.3. Leida kahe muutuja funktsiooni $z = \arcsin(x + y)$ määramispiirkond.

Arkussinuse agument peab olema lõigus $[-1; 1]$ (vt punkti 1.5): $-1 \leq x + y \leq 1$ ehk

$$\begin{cases} x + y \leq 1 \\ x + y \geq -1 \end{cases} \quad \text{ehk} \quad \begin{cases} y \leq 1 - x \\ y \geq -1 - x \end{cases}$$

Kahe viimase võrratuse piirjuhud on sirged $y = 1 - x$ ja $y = -1 - x$, mis on kujutatud joonisel 5.3. Funktsiooni määramispiirkond jääb nende kahe sirge vahele, sirged ise kaasa arvatud ja on joonisel 5.3 viirutatud.



Joonis 5.3. Funktsiooni $z = \arcsin(x + y)$ määramispiirkond

Näide 5.4. Leida kolme muutuja funktsiooni $w = \ln x + \ln y + \ln z$ määramispiirkond.

Kuna logaritmid on vaid positiivsetel arvudel, siis tuleb üheaegselt täita kolm tingimust:

$$\begin{cases} x > 0, \\ y > 0, \\ z > 0. \end{cases}$$

Geomeetriliselt on funktsiooni $w = \ln x + \ln y + \ln z$ määramispiirkonnaks kolmemõõtmelise ruumi osa, milleks on esimene oktant, rajad välja arvatud.

5.2. KAHE MUUTUJA FUNKTSIOONI PIIRVÄÄRTUS JA PIDEVUS

Definitsioon 5.4. Punkti $M_0(x_0, y_0)$ **ümbruseks** nimetatakse punktide hulka, mille iga punkti koordinaadid rahuldavad võrratust $\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta$, s.t need punktid asetsevad seespool ringjoont, mille raadius on δ ja keskpunkt on $M_0(x_0, y_0)$.

Ühe muutuja funktsiooni punkti ümbruse mõiste on toodud punkti 4.6 definitsioonis 4.2.

Definitsioon 5.5. Arvu b nimetatakse **funktsiooni** $f(x, y)$ **piirväärtuseks** kohal M_0 , kui vastavalt igale kuitahes väikesele positiivsele arvule ε leidub niisugune positiivne arv δ , et kehtib võrratus $|f(M) - b| < \varepsilon$, niipea kui $|x - a| < \delta$, $M \neq M_0$.

Lühidalt kirjutatakse $\lim_{M \rightarrow M_0} f(M) = b$ ehk $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = b$.

Definitsiooni 5.5 sõnastus on lähedane punktis 2.1 esitatud ühe muutuja funktsiooni piirväärtuse definitsioonile 2.1. Samuti on sarnane piirväärtuse arvutamise tehnika. Illustratsiooniks on alljärgnev näide 5.5, kus määramatusest $\frac{0}{0}$ lahtisaamiseks teisendatakse nimetajas olev ruutjuur lugejasse (vt võrdluseks punkti 2.3 näiteid 2.6 ja 2.7).

Näide 5.5. Leida piirväärtus $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy}{\sqrt{1+xy} - 1}$.

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy}{\sqrt{1+xy} - 1} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy(\sqrt{1+xy} + 1)}{(\sqrt{1+xy} - 1)(\sqrt{1+xy} + 1)} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy(\sqrt{1+xy} + 1)}{1+xy - 1} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (\sqrt{1+xy} + 1) = 2.$$

Definitsioon 5.6. Funktsiooni $f(x, y)$ nimetatakse punktis $M_0(x_0, y_0)$ **pidevaks**, kui

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0). \quad (5.4)$$

Definitsioon 5.7. Funktsiooni, mis on pidev mingi piirkonna igas punktis, nimetatakse pidevaks selles piirkonnas.

Võrdluseks vt punktist 2.6 ühe muutuja funktsiooni pidevuse definitsioone 2.9 ja 2.10 ning samuti katkevuse tingimusi punktist 2.7.

Funktsioon $f(x, y)$ **on katkev punktis** $N_0(x_0, y_0)$, kui selles punktis on täidetud vähemalt üks kolmest järgnevast tingimusest:

- 1) $f(x, y)$ pole määratud punktis $N_0(x_0, y_0)$;
- 2) funktsioonil $f(x, y)$ ei ole lõplikku piirväärtust punktis $N_0(x_0, y_0)$;
- 3) tingimus (5.4) ei ole punktis $N_0(x_0, y_0)$ täidetud, s.t $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) \neq f(x_0, y_0)$.

Näide 5.6. Leida funktsiooni $z = \cos \frac{1}{xy}$ katkevused.

Täita tuleb tingimus $xy \neq 0$, millest järeldub, et $\begin{cases} x \neq 0, \\ y \neq 0. \end{cases}$ See tähendab, et katkevused on koordinaattelgedel.

5.3. OSATULETISED

Kahe muutuja funktsiooni $z = f(x, y)$ osamuuduks x järgi nimetatakse avaldist

$$\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y), \quad (5.5)$$

osamuuduks y järgi avaldist

$$\Delta_y z = f(x, y + \Delta y) - f(x, y) \quad (5.6)$$

ning täismuuduks avaldist

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y). \quad (5.7)$$

Üldiselt osamuutude summa ei võrdu täismuuduga:

$$\Delta z \neq \Delta_x z + \Delta_y z.$$

Definitsioon 5.8. Funktsiooni $z = f(x, y)$ osatuletiseks x järgi nimetatakse piirväärtust

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} = z'_x \equiv f'_x(x, y) \equiv \frac{\partial z}{\partial x} \quad (5.8)$$

ja osatuletiseks y järgi nimetatakse piirväärtust

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} = z'_y \equiv f'_y(x, y) \equiv \frac{\partial z}{\partial y}. \quad (5.9)$$

Definitsioonis 5.8 on toodud ka osatuletiste märkimiseks kasutatavad tähistused.

Juhis 5.2. Kuna osamuut x järgi $\Delta_x z$ (5.5) arvutatakse muutumatu y puhul ja osamuut y järgi $\Delta_y z$ (5.6) arvutatakse muutumatu x puhul, siis:

- osatuletis x järgi $\frac{\partial z}{\partial x}$ arvutatakse eeldusel, et y on konstant ja
- osatuletis y järgi $\frac{\partial z}{\partial y}$ arvutatakse eeldusel, et x on konstant.

Juhise 5.2 arvestamine taandab osatuletiste leidmise ühe muutuja funktsiooni tuletise leidmise tehnikale, vt punkti 3.3 näiteid 3.2 ja 3.3 ning punkti 3.5 näiteid 3.5 – 3.10.

Näide 5.7. Leida funktsiooni $z = x^3 + 2y^4 - 3xy + \frac{x}{y}$ osatuletised.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = (x^3)'_x + (2y^4)'_x - (3xy)'_x + \left(\frac{x}{y}\right)'_x = 3x^2 + 0 - 3y \cdot (x)'_x + \frac{1}{y} \cdot (x)'_x = 3x^2 - 3y + \frac{1}{y},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = (x^3)'_y + (2y^4)'_y - (3xy)'_y + \left(\frac{x}{y}\right)'_y = 0 + 8y^3 - 3x \cdot (y)'_y + x \cdot \left(\frac{1}{y}\right)'_y = 8y^3 - 3x - \frac{x}{y^2}.$$

Näide 5.8. Leida funktsiooni $z = \sqrt{x^2 + y^3}$ osatuletised.

Tegemist on liitfunktsiooni tuletisega. Kõigepealt leitakse ruutjuure tuletis punkti 3.2 valemiga 5, mis korrutatakse juurealuse avaldise tuletisega, esimesel juhul x järgi, teisel juhul y järgi:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + y^3}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^3}},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + y^3}} \cdot 3y^2 = \frac{3y^2}{2\sqrt{x^2 + y^3}}.$$

Näide 5.9. Leida funktsiooni $z = ye^{-xy}$ osatuletised.

Leides osatuletist y järgi, on vaja kasutada korrutise tuletise valemit (3.6), kuid x järgi osatuletise leidmisel pole korrutise tuletise valem vajalik:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y \cdot e^{-xy} \cdot (-xy)'_x = y \cdot e^{-xy} \cdot (-y) = -y^2 e^{-xy},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = (y)'_y \cdot e^{-xy} + y \cdot (e^{-xy})'_y = e^{-xy} + y \cdot e^{-xy} (-xy)'_y = e^{-xy} + y \cdot e^{-xy} (-x) = e^{-xy} - xy \cdot e^{-xy}.$$

Näide 5.10. Leida funktsiooni $z = \ln \frac{xy}{2} + \arctan \frac{x}{y}$ osatuletised.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{\frac{xy}{2}} \cdot \frac{y}{2} + \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2} \cdot \frac{1}{y} = \frac{1}{x} + \frac{y}{x^2 + y^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{\frac{xy}{2}} \cdot \frac{x}{2} + \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2} \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right) = \frac{1}{y} - \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

Näide 5.11. Leida funktsiooni $z = \ln \tan \frac{y}{x}$ osatuletised.

Nii nagu ühe muutuja liitfunktsiooni tuletise leidmiselgi (punkti 3.5 näidetes 3.5 – 3.10), tuleb ka siin esmalt leida „välise“ funktsiooni, s.o naturaallogaritm tuletis, mis korrutatakse „seesmiseks“ funktsiooniks oleva tangensi tuletisega ning lõpuks korrutatakse tulemus murruga $\frac{y}{x}$ osatuletisega. Kaks osatuletist $\frac{\partial z}{\partial x}$ ja $\frac{\partial z}{\partial y}$ erinevadki ainult selle viimasena arvatava $\frac{y}{x}$ osatuletise poolest.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{\tan \frac{y}{x}} \cdot \frac{1}{\cos^2 \frac{y}{x}} \cdot y \cdot \left(-\frac{1}{x^2} \right) = -\frac{2y}{x^2 \sin \frac{2y}{x}},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{\tan \frac{y}{x}} \cdot \frac{1}{\cos^2 \frac{y}{x}} \cdot \frac{1}{x} = \frac{2}{x \sin \frac{2y}{x}}.$$

Näide 5.12. Leida funktsiooni $z = \arcsin \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ osatuletised.

Leides osatuletist y järgi, peab arkussinuse argumenti tuletise leidmisel kasutama jagatise tuletise valemit (3.8). Osatuletise leidmine x järgi seda ei nõua. Selle asemel võib lugejas oleva y võib tuua tuletise märgi alt tuletise märgi ette, siis kirjutada nimetaja murrulise astmenäitajaga $(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}$, misjärel saab kasutada astme tuletise valemit.

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{y^2}{x^2 + y^2}}} \cdot y \cdot \left((x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}} \right)'_x = \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2 + y^2 - y^2}{x^2 + y^2}}} \cdot y \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) \cdot \left((x^2 + y^2)^{-\frac{3}{2}} \right) \cdot 2x = \\ &= -\frac{xy\sqrt{x^2 + y^2}}{x\sqrt{(x^2 + y^2)^3}} = -\frac{y}{x^2 + y^2}, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{y^2}{x^2 + y^2}}} \cdot \frac{\sqrt{x^2 + y^2} - y \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot 2y}{x^2 + y^2} = \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2 + y^2 - y^2}{x^2 + y^2}}} \cdot \frac{\frac{x^2 + y^2 - y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}}{x^2 + y^2} = \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

Näide 5.13. Leida kolme muutuja funktsiooni $w = z^{xy}$ osatuletised.

Osatuletise leidmisel x ja y järgi töötab eksponentfunktsiooni tuletise valem (punkti 3.2 valem 6) ning z järgi astmefunktsiooni tuletise valem (punkti 3.2 valem 2):

$$\frac{\partial w}{\partial x} = yz^{xy} \ln z, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = xz^{xy} \ln z, \quad \frac{\partial w}{\partial z} = xyz^{xy-1}.$$

5.4. KÖRGEMAT JÄRKU OSATULETISED

Funktsiooni $z = f(x, y)$ osatuletistel $f'_x(x, y)$ ja $f'_y(x, y)$ kui muutujate x ja y funktsioonidel võivad omakorda olla osatuletised. Sel viisil saame funktsiooni $f(x, y)$ teist järku osatuletised.

Näide 5.14. Leida funktsiooni $f(x, y) = e^x \cdot \ln y + \ln x \cdot \sin y$ kõik teist järku osatuletised.

Esimest järku osatuletised:

$$f'_x(x, y) = e^x \cdot \ln y + \frac{\sin y}{x}, \quad f'_y(x, y) = \frac{e^x}{y} + \ln x \cdot \cos y.$$

Teist järku osatuletis x ja y järgi:

$$(f'_x(x, y))'_x = f''_{xx}(x, y) = e^x \cdot \ln y - \frac{\sin y}{x^2}, \quad (f'_y(x, y))'_y = f''_{yy}(x, y) = -\frac{e^x}{y^2} - \ln x \cdot \sin y.$$

Leiame kaks segatuletist. Neist esimest on kõigepealt diferentseeritud x järgi ja siis y järgi, teist aga vastupidi, enne y järgi ja siis x järgi:

$$(f'_x(x, y))'_y = f''_{xy}(x, y) = \frac{e^x}{y} + \frac{\cos y}{x}, \quad (f'_y(x, y))'_x = f''_{yx}(x, y) = \frac{e^x}{y} + \frac{\cos y}{x}.$$

Paneme tähele, et saime ühesuguse tulemuse, mis ei sõltunud diferentseerimise järjekorrast. Näites 5.14 ilmnenud tulemus segatuletiste võrdsusest on üldisema iseloomuga ja on täpsemalt formuleeritud järgnevas teoreemis 5.1.

Teoreem 5.1. Kui segatuletised $f''_{xy}(x, y)$ ja $f''_{yx}(x, y)$ on pidevad mingis punktis, siis on nad selles punktis võrdsed $f''_{xy}(x, y) = f''_{yx}(x, y)$.

Teiste sõnadega, kui segatuletised on pidevad, siis nad ei sõltu diferentseerimise järjekorrast.

Tõestus. Moodustame avaldise $\Omega = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y) - f(x + \Delta x, y) + f(x, y)$. (5.10)

Märkides $\varphi(x) = f(x, y + \Delta y) - f(x, y)$ (5.11)

ja $\psi(y) = f(x + \Delta x, y) - f(x, y)$ (5.12)

võime (5.10) kirjutada kujul $\Omega = \varphi(x + \Delta x) - \varphi(x) = \psi(y + \Delta y) - \psi(y)$. (5.13)

Segatuletised $f''_{xy}(x, y)$ ja $f''_{yx}(x, y)$, olles pidevad punktis (x, y) , peavad eksisteerima punkti (x, y) mingis ümbruses. Selles ümbruses peavad siis eksisteerima ka (lõplikud) esimest järku osatuletised $f'_x(x, y)$ ja $f'_y(x, y)$. Seega võib (5.13) kohta kasutada Lagrange'i keskväärtusvalemit (4.1):

$$\Omega = \varphi'_x(\xi_1)\Delta x = \psi'_y(\eta_1)\Delta y, \quad (5.14)$$

kus $x < \xi_1 < x + \Delta x$ ja $y < \eta_1 < y + \Delta y$.

Kasutades seoseid (5.11) ja (5.12) saab valemis (5.14) minna tagasi esialgsele funktsioonile f :

$$\Omega = [f'_x(\xi_1, y + \Delta y) - f'_x(\xi_1, y)]\Delta x = [f'_y(x + \Delta x, \eta_1) - f'_y(x, \eta_1)]\Delta y. \quad (5.15)$$

Veelkordselt (5.15) kohta Lagrange'i keskvärtusvalemit rakendades saame

$$\Omega = f''_{xy}(\xi_1, \eta_2)\Delta x\Delta y = f''_{yx}(\xi_2, \eta_1)\Delta y\Delta x, \quad (5.16)$$

kus $x < \xi_2 < x + \Delta x$ ja $y < \eta_2 < y + \Delta y$.

Seosest (5.16) tuleneb $f''_{xy}(\xi_1, \eta_2) = f''_{yx}(\xi_2, \eta_1)$, millest piirprotsessis $\Delta x \rightarrow 0$, $\Delta y \rightarrow 0$ segatuletiste pidevuse tõttu järeldub $f''_{xy}(x, y) = f''_{yx}(x, y)$. Sellega on teoreem 5.1 tõestatud.

Märkus 5.2. Funktsiooni $f(x, y)$ teist järku osatuletisi võib tähistada ka kujul

$$f''_{xx}(x, y) = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2}, \quad f''_{yy}(x, y) = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2}, \quad f''_{xy}(x, y) = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y}.$$

Märkus 5.3. Funktsiooni $f(x, y)$ teist järku osatuletistel kui muutujate x ja y funktsioonidel võivad omakorda olla osatuletised, mida nimetatakse funktsiooni $f(x, y)$ kolmandat järku osatuletisteks. Üldistades teoreemi 5.1, saab neli isesugust kolmandat järku osatuletist:

$$f'''_{xxx}(x, y) = \frac{\partial^3 f(x, y)}{\partial x^3}, \quad f'''_{yyy}(x, y) = \frac{\partial^3 f(x, y)}{\partial y^3}, \quad f'''_{xxy}(x, y) = \frac{\partial^3 f(x, y)}{\partial x^2 \partial y}, \quad f'''_{xyy}(x, y) = \frac{\partial^3 f(x, y)}{\partial x \partial y^2}.$$

5.5. TÄISDIFERENTSIAAL

Seame eesmärgiks esitada funktsiooni $z = f(x, y)$ täismuut (5.7) $\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$ kahe liidetava summana, millest esimene liidetav oleks piirprotsessis $\Delta x \rightarrow 0$, $\Delta y \rightarrow 0$ domineeriv, teine liidetav aga oleks selles piirprotsessis suhteliselt palju väiksem (ehk nagu öeldakse, kõrgemat järku lõpmatult kahanev suurus võrreldes esimese liidetavaga). Selleks viime funktsiooni $z = f(x, y)$ täismuudu Δz kõigepealt kujule

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) = [f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y)] + [f(x, y + \Delta y) - f(x, y)]. \quad (5.17)$$

Olgu funktsioonil $z = f(x, y)$ kohal (x, y) pidevad osatuletised. Siis saab funktsiooni täismuudu (5.17) avaldada Lagrange'i keskvärtusvalemi (4.1) abil osatuletiste kaudu.

$$\Delta z = f'_x(\xi, y + \Delta y)\Delta x + f'_y(x, \eta)\Delta y, \quad (5.18)$$

kus $x < \xi < x + \Delta x$ ja $y < \eta < y + \Delta y$.

Kuna osatuletised on vastavalt eeldusele pidevad, siis piirprotsessis $\Delta x \rightarrow 0$, $\Delta y \rightarrow 0$ ilmselt $\xi \rightarrow x$ ja $\eta \rightarrow y$ ning seega

$$\Delta z = [f'_x(x, y)\Delta x + \alpha_1] + [f'_y(x, y)\Delta y + \alpha_2], \quad (5.19)$$

kus α_1 ja α_2 on lõpmatult kahanevad suurused piirprotsessis $\Delta x \rightarrow 0$, $\Delta y \rightarrow 0$ (lõpmatult kahanevate suuruste kohta vt punkte 2.2 ja 2.4).

Märgime $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$, mis on samuti lõpmatult kahanev (vt punkti 2.2 teoreemi 2.5) ja tähistame $\Delta x = dx$ ning $\Delta y = dy$. Siis võtab (5.19) kuju

$$\Delta z = f'_x(x, y)dx + f'_y(x, y)dy + \alpha. \quad (5.20)$$

Täpsem analüüs näitab, et α on piirprotsessis $\Delta x \rightarrow 0$, $\Delta y \rightarrow 0$ kõrgemat järku lõpmatult kahanev suurus $\Delta \rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$ suhtes, vt ka punkti 2.4 definitsiooni 2.5 (lihtsustatult öeldes, kui Δx ja Δy kahanevad, siis muutub valemi (5.20) kolmas liidetav α võrreldes kahe esimese liidetavaga tunduvalt väiksemaks). Võrdluseks vt punkti 3.7 ühe muutuja funktsiooni diferentsiaali mõiste ja geomeetrilise tähenduse kohta.

Definitsioon 5.9. Funktsiooni $z = f(x, y)$, mille täismuutu saab esitada kujul (5.20), nimetatakse diferentseeruvaks.

Definitsioon 5.10. Kui funktsioon $z = f(x, y)$ on diferentseeruv kohal (x, y) , siis nimetatakse avaldist $f'_x(x, y)dx + f'_y(x, y)dy$ funktsiooni $f(x, y)$ **täisdiferentsiaaliks** kohal (x, y) ja tähistatakse dz :

$$dz = f'_x(x, y)dx + f'_y(x, y)dy. \quad (5.21)$$

Seega võib täismuudu (5.20) lühidalt esitada kahe liidetava kujul, millest esimene on piirprotsessis $\Delta x \rightarrow 0$, $\Delta y \rightarrow 0$ domineeriv, teine aga suhteliselt palju väiksem (s.o kõrgemat järku lõpmatult kahanev suurus $\Delta \rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$ suhtes):

$$\Delta z = dz + \alpha. \quad (5.22)$$

Seosega (5.22) oleme käesoleva punkti 5.5 alguses seatud eesmärgi saavutanud.

Märkus 5.4. Kolme muutuja funktsiooni $w = f(x, y, z)$ täisdiferentsiaal avaldub kujul

$$dw = f'_x(x, y, z)dx + f'_y(x, y, z)dy + f'_z(x, y, z)dz. \quad (5.23)$$

Näide 5.15. Leida funktsiooni $f(x, y) = -\cos(xy)$ täisdiferentsiaal.

Leiame kõigepealt osatuletised

$$f'_x(x, y) = y \sin(xy),$$

$$f'_y(x, y) = x \sin(xy),$$

mis on pidevad iga x ja y puhul ning seejärel avaldame täisdiferentsiaali vastavalt valemile (5.21):

$$dz = y \sin(xy)dx + x \sin(xy)dy.$$

5.6. TÄISDIFERENTSIAALI KASUTAMINE LIGIKAUDSETES ARVUTUSTES

Lähtume eelmise punkti 5.5 valemist (5.22) $\Delta z = dz + \alpha$, kus funktsiooni $z = f(x, y)$ täismuut Δz oli esitatud täisdiferentsiaali dz ja kõrgemat järku lõpmatult kahaneva suuruse α summana. Jättes siin α ära kui kõrgemat järku lõpmatult kahaneva suuruse piirprotsessis $\Delta x \rightarrow 0$, $\Delta y \rightarrow 0$, saame ligikaudse võrduse

$$\Delta z \approx dz, \quad (5.24)$$

mis kehtib küllalt väikeste Δx ja Δy väärtuste puhul. Seoste (5.7) ja (5.21) abil võib (5.24) kirjutada detailsemalt kujul (kasutades ligikaudsete arvutuste kontekstis tähiseid $\Delta x = dx$ ja $\Delta y = dy$):

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) \approx f'_x(x, y)\Delta x + f'_y(x, y)\Delta y,$$

millest avaldame $f(x + \Delta x, y + \Delta y)$ ja saame

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) \approx f(x, y) + f'_x(x, y)\Delta x + f'_y(x, y)\Delta y. \quad (5.25)$$

Valem (5.25) sobib ligikaudseks arvutuseks juhul kui Δx ja Δy on küllalt väikesed.

Näide 5.16. Arvutada ligikaudu $\sqrt{4,05^2 + 2,93^2}$, kasutades sobivalt valitud funktsiooni täisdiferentsiaali.

Ülesandes on ruutjuure all 4,05 ja 2,93, mis vähe erinevad arvudest 4 ja 3. Kuid $\sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$ saab peast asvutada. Ilmselt on ülesande vastus lähedane arvule 5. Eelnevat silmas pidades on võimalik ligikaudseks arvutuseks kasutada seost (5.25). Valime funktsiooni $f(x, y)$ struktuuri vastavalt nõutavatele arvutustele:

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Siis

$$f'_x(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

ja

$$f'_y(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot 2y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Valime $x = 4$ ja $y = 3$. Siis $\Delta x = 4,05 - 4 = 0,05$ ja $\Delta y = 2,93 - 3 = -0,07$, mis osutuvad seose (5.25) kasutamiseks küllalt väikesteks ja arvutame $f(4;3) = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$,

$$f'_x(4;3) = \frac{4}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{4}{5},$$

$$f'_y(4;3) = \frac{3}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{3}{5}.$$

Lõpuks seost (5.25) kasutades arvutame ligikaudse tulemuse

$$\sqrt{4,05^2 + 2,93^2} \approx 5 + \frac{4}{5} \cdot 0,05 + \frac{3}{5} \cdot (-0,07) = 5 + 0,04 - 0,042 = 4,998,$$

mis on lähedane täpsemale tulemusele $\sqrt{4,05^2 + 2,93^2} \approx 4,99874$.

Näide 5.17. Arvutada ligikaudu $\ln(\sqrt[3]{1,03} + \sqrt[4]{0,98} - 1)$, kasutades sobivalt valitud funktsiooni täisdiferentsiaali.

Valime funktsiooni kujul $f(x, y) = \ln(\sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{y} - 1)$. Võtame $x=1$ ja $y=1$, sest siis $\ln(\sqrt[3]{1} + \sqrt[4]{1} - 1) = 0$ ning $\Delta x = 1,03 - 1 = 0,03$ ja $\Delta y = 0,98 - 1 = -0,02$ tulevad seose (5.25) kasutamiseks piisavalt väikesed.

Leiame osatuletised

$$f'_x(x, y) = \frac{1}{\sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{y} - 1} \cdot \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} \quad \text{ja} \quad f'_y(x, y) = \frac{1}{\sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{y} - 1} \cdot \frac{1}{4} y^{-\frac{3}{4}} \quad \text{ning arvutame}$$

$$f(1;1) = \ln(\sqrt[3]{1} + \sqrt[4]{1} - 1) = 0, \quad f'_x(1;1) = \frac{1}{\sqrt[3]{1} + \sqrt[4]{1} - 1} \cdot \frac{1}{3} 1^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3} \quad \text{ja} \quad f'_y(1;1) = \frac{1}{\sqrt[3]{1} + \sqrt[4]{1} - 1} \cdot \frac{1}{4} 1^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{4}.$$

Ligikaudse tulemuse arvutame valemiga (5.25):

$$\ln(\sqrt[3]{1,03} + \sqrt[4]{0,98} - 1) \approx 0 + \frac{1}{3} \cdot 0,03 + \frac{1}{4} \cdot (-0,02) = 0,01 - 0,005 = 0,005.$$

Täpsem tulemus on $\ln(\sqrt[3]{1,03} + \sqrt[4]{0,98} - 1) \approx 0,00485$.

Näide 5.18. Arvutada ligikaudu $\sin 28^\circ \cdot \cos 61^\circ$, kasutades sobivalt valitud funktsiooni täisdiferentsiaali.

Valime funktsiooni kujul $f(x, y) = \sin x \cdot \cos y$. Õige tulemuse saamiseks peavad x ja y olema radiaanides.

Võtame $x = \frac{\pi}{6}$ ja $y = \frac{\pi}{3}$, sest siis $\sin \frac{\pi}{6} \cdot \cos \frac{\pi}{3} = 0,5 \cdot 0,5$ ning $\Delta x = \frac{28\pi}{180} - \frac{\pi}{6} = -\frac{2\pi}{180} = -\frac{\pi}{90}$ ja

$\Delta y = \frac{61\pi}{180} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{180}$ tulevad valemi (5.25) kasutamiseks piisavalt väikesed. Leiame osatuletised

$$f'_x(x, y) = \cos x \cdot \cos y \quad \text{ja}$$

$$f'_y(x, y) = -\sin x \cdot \sin y$$

ning arvutame $f\left(\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}\right) = \sin \frac{\pi}{6} \cdot \cos \frac{\pi}{3} = 0,5 \cdot 0,5 = 0,25$,

$$f'_x\left(\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}\right) = \cos \frac{\pi}{6} \cdot \cos \frac{\pi}{3} \approx 0,8660 \cdot 0,5 \quad \text{ja}$$

$$f'_y\left(\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}\right) = -\sin \frac{\pi}{6} \cdot \cos \frac{\pi}{3} \approx -0,5 \cdot 0,8660.$$

Ligikaudse tulemuse arvutame valemiga (5.25):

$$\sin 28^\circ \cdot \cos 61^\circ \approx 0,25 + 0,8660 \cdot 0,5 \cdot \left(-\frac{\pi}{90}\right) - 0,5 \cdot 0,8660 \cdot \frac{\pi}{180} \approx 0,227.$$

Vastus on lähedane täpsemale tulemusele $\sin 28^\circ \cdot \cos 61^\circ \approx 0,22760$.

5.7. KAHE MUUTUJA FUNKTSIOONI TAYLORI VALEM

Eelmises punktis 5.6 kasutatud täisdiferentsiaalile baseeruv ligikaudse arvutuse valem (5.25) kasutab $f(x, y)$ väärtuse arvutamiseks kahte parandusliiget $f'_x(x, y)\Delta x$ ja $f'_y(x, y)\Delta y$, mis sisaldavad esimest järku osatuletisi. Valemit (5.25) on võimalik täpsustada, lisades sinna kõrgemat järku osatuletisi sisaldavaid parandusliikmeid. Niisuguse üldistuse tulemusena saadakse kahe muutuja funktsiooni Tayloriga valem.

Olgu funktsioon $f(x, y)$ ja tema kõik osatuletised kuni $n+1$ järguni kaasa arvatult pidevad punkti $Q(x_0, y_0)$ ümbruses. Siis saab rääkida kahe muutuja funktsiooni $f(x, y)$ Tayloriga valemist

$$f(x, y) = P_n(x, y) + R_n, \quad (5.26)$$

kus $P_n(x, y)$ on binoomidest $x - x_0$ ja $y - y_0$ koostatud n -astme polünoom ja R_n on jääkliige. Polünoom $P_n(x, y)$ saadakse kahesammulise teisendusega, kui esiteks lugeda x konstantseks ja avaldada $f(x, y)$ ühe muutuja funktsiooni Tayloriga valemi (4.24) abil $y - y_0$ astmete järgi. Teisenduse esimese sammu järel tekkivad liikmed $f(x, y_0)$, $f'_y(x, y_0)$, $f''_{yy}(x, y_0)$ jne arendatakse teisel sammul jällegi ühe muutuja funktsiooni Tayloriga valemi (4.24) abil, seekord $x - x_0$ astmete järgi. Piirdudes järgnevas valemis (5.27) teist järku tuletistega, saadakse kahe muutuja funktsiooni $f(x, y)$ Tayloriga valem kujul

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + f'_y(x_0, y_0) \cdot (y - y_0) + \frac{1}{2!} \left[f''_{xx}(x_0, y_0) \cdot (x - x_0)^2 + 2f''_{xy}(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) \cdot (y - y_0) + f''_{yy}(x_0, y_0) \cdot (y - y_0)^2 \right] + R_2. \quad (5.27)$$

5.8. ILMUTAMATA FUNKTSIOONI TULETIS

Olgu muutujad x ja y seotud võrrandiga

$$F(x, y) = 0. \quad (5.28)$$

Kui leidub selline funktsioon $y = f(x)$, mille asetamisel võrrandisse (5.28) saadakse samasus, siis öeldakse, et funktsioon $y = f(x)$ on võrrandiga (5.28) määratud **ilmutamata funktsioon**. Ilmutamata funktsioon võib olla kas ühene või mitmene.

Näide 5.19. Võrrand $x^2 + y^2 - r^2 = 0$ esitab lõigus $[-r, r]$ kahest funktsiooni $y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$ ilmutamata kujul. Geomeetriselt on $x^2 + y^2 - r^2 = 0$ ringjoone võrrand; $y = +\sqrt{r^2 - x^2}$ on x -telje kohal olev poolringjoon, $y = -\sqrt{r^2 - x^2}$ on aga x -teljest allpool olev poolringjoon.

Iga ilmutamata kujul antud funktsiooni ei saa esitada ilmutatud kujul (s.o kujul $y = f(x)$) niimoodi, et $f(x)$ oleks elementaarfunktsioon (elementaarfunktsioonide kohta vt punkti 1.6). Näiteks võrrandit $xy - \tan y = 0$ ei saa y suhtes (elementaarfunktsioonides) lahendada.

Märgime, et iga ilmutatud funktsiooni $y = f(x)$ saab esitada ilmutamata kujul $y - f(x) = 0$.

Juhis 5.3. Ilmutamata funktsiooni $F(x, y) = 0$ tuletise $y' = y'_x$ saab lihtsamal juhul leida nii:

1. Arvutame $F(x, y)$ tuletise x järgi, lugedes y -i funktsiooniks x -st (kasutades liitfunktsiooni tuletise leidmise eeskirja) ja võrdsustame selle tuletise nulliga.
2. Lahendame saadud võrrandi y' suhtes.

Näide 5.20. Leida ilmutamata funktsiooni $xy - \tan y = 0$ tuletis kasutades juhust 5.3.

1. Leiame $(xy - \tan y)' = y + xy' - \frac{1}{\cos^2 y} \cdot y'$ ja võrdsustame selle nulliga $y + xy' - \frac{1}{\cos^2 y} \cdot y' = 0$.
2. Avaldame $y' = \frac{y}{\frac{1}{\cos^2 y} - x} = \frac{y \cos^2 y}{1 - x \cos^2 y}$.

Ilmutamata funktsiooni (5.28) $F(x, y) = 0$ tuletise y'_x leidmise üldine eeskiri on formuleeritud järgnevas teoreemis 5.2.

Teoreem 5.2. Kui funktsioon $F(x, y)$ on diferentseeruv punktis $P(x, y)$ ja selles punktis $F'_y(x, y) \neq 0$, siis selles punktis

$$y'_x = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}. \quad (5.29)$$

Tõestus. y on argumendi x funktsioon. Vastaku argumendi $x + \Delta x$ väärtusele funktsiooni väärtus $y + \Delta y$. Võrrandi $F(x, y) = 0$ põhjal saame siis $F(x + \Delta x, y + \Delta y) = 0$ ning järelikult $F(x + \Delta x, y + \Delta y) - F(x, y) = 0$. Vastavalt punkti 5.5 valemile (5.20) aga avaldub funktsiooni täismuut osatuletiste ja lõpmatult kahaneva suuruse α kaudu järgmiselt:

$$F(x + \Delta x, y + \Delta y) - F(x, y) = F'_x(x, y)\Delta x + F'_y(x, y)\Delta y + \alpha = 0. \quad (5.30)$$

Jagades (5.30) parempoolse võrduse Δx -ga saadakse võrrand $F'_x(x, y) + F'_y(x, y) \cdot \frac{\Delta y}{\Delta x} + \frac{\alpha}{\Delta x} = 0$. (5.31)

Võrrandist (5.31) suhte $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ avaldamisel saadakse
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{F'_x(x, y) + \frac{\alpha}{\Delta x}}{F'_y(x, y)}. \quad (5.32)$$

Leiame seose (5.32) piirväärtuse kui $\Delta x \rightarrow 0$. Võrduse vasakule poolele saame tuletise definitsiooni (3.3) kohaselt y'_x . Kuna α on piirprotsessis $\Delta x \rightarrow 0$ kõrgemat järku lõpmatult kahanev suurus kui Δx , siis $\frac{\alpha}{\Delta x} \rightarrow 0$. Nii saamegi tõestamist vajanud valemi (5.29).

Näide 5.21. Leida ilmutamata funktsiooni $x + y - e^{x-y} = 0$ tuletis.

Arvutame osatuletised $F'_x(x, y) = (x + y - e^{x-y})'_x = 1 - e^{x-y}$ ja $F'_y(x, y) = (x + y - e^{x-y})'_y = 1 + e^{x-y}$ ning valemit (5.29) kasutades saame
$$y'_x = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)} = -\frac{1 - e^{x-y}}{1 + e^{x-y}} = \frac{e^{x-y} - 1}{1 + e^{x-y}}.$$

Kui kahe muutuja **funktsioon** $z = f(x, y)$ on antud ilmutamata kujul võrrandiga

$$F(x, y, z) = 0, \quad (5.33)$$

siis saab selle kahe muutuja ilmutamata funktsiooni osatuletised leida järgnevas teoreemis 5.3 toodud valemitega (5.34).

Teoreem 5.3. Kui kahe muutuja ilmutamata funktsioon $F(x, y, z)$ on diferentseeruv punktis $P(x, y, z)$ ja selles punktis $F'_z(x, y, z) \neq 0$, siis selles punktis

$$\begin{aligned} z'_x &= \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)}, \\ z'_y &= \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)}. \end{aligned} \quad (5.34)$$

Näide 5.22. Leida kahe muutuja ilmutamata funktsiooni $x \cos y + y \cos z + z \cos x - 1 = 0$ osatuletised z'_x ja z'_y valemitega (5.34).

Arvutame kõigepealt $F'_x(x, y, z) = \cos y - z \sin x$, $F'_y(x, y, z) = -x \sin y + \cos z$, $F'_z(x, y, z) = -y \sin z + \cos z$ ja seejärel leiame vastavalt valemitele (5.34) osatuletised

$$\begin{aligned} z'_x &= -\frac{F'_x(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)} = \frac{z \sin x - \cos y}{\cos z - y \sin z}, \\ z'_y &= -\frac{F'_y(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)} = \frac{x \sin y - \cos z}{\cos z - y \sin z}. \end{aligned}$$

5.9. KAHE MUUTUJA FUNKTSIOONI LOKAALSED EKSTREEMUMID

Definitsioon 5.11. Funktsioonil $f(x, y)$ on kohal $M_0(x_0, y_0)$ **lokaalne maksimum**, kui leidub niisugune M_0 ümbrus, kus $f(x, y) < f(x_0, y_0)$ ja **lokaalne miinimum**, kui leidub niisugune M_0 ümbrus, kus $f(x, y) > f(x_0, y_0)$.

Punkti $M_0(x_0, y_0)$ ümbruse mõiste on toodud punkti 5.2 definitsioonis 5.4.

Definitsioon 5.12. Funktsiooni $f(x, y)$ määramispiirkonna neid punkte, kus mõlemad esimest järku osatuletised võrduvad nulliga $f'_x(x, y) = f'_y(x, y) = 0$ või kus esimest järku osatuletised $f'_x(x, y)$ ja $f'_y(x, y)$ katkevad, nimetatakse funktsiooni $f(x, y)$ **kriitilisteks punktideks**.

Teoreem 5.4. (Lokaalse ekstreemumi olemasolu tarvilik tingimus). Funktsioonil $f(x, y)$ võib olla lokaalne ekstreemum vaid kriitilises punktis.

Tõestus. Olgu kohal $M_0(x_0, y_0)$ lokaalne ekstreemum. Kui $y = y_0$ on konstantne, siis $f(x, y_0)$ on ühe muutuja funktsioon. Et kohal $x = x_0$ on tema lokaalne ekstreemum, siis $f'_x(x_0, y_0) = 0$ või $f'_x(x_0, y_0)$ katkeb (vastavalt punkti 4.6 teoreemile 4.6). Analoogselt saab näidata, et $f'_y(x_0, y_0) = 0$ või $f'_y(x_0, y_0)$ katkeb.

Definitsioon 5.13. Niisuguseid punkte, kus funktsiooni $f(x, y)$ mõlemad esimest järku osatuletised võrduvad nulliga $f'_x(x, y) = f'_y(x, y) = 0$, nimetatakse funktsiooni $f(x, y)$ **statsionaarseteks punktideks**.

Märkus 5.5. Kasutame järgneva teoreemi 5.5 kompaktsemaks formuleerimiseks järgnevaid tähistusi

$$A = f''_{xx}(x_0, y_0), \quad B = f''_{xy}(x_0, y_0), \quad C = f''_{yy}(x_0, y_0), \quad D = AC - B^2, \quad (5.35)$$

kus D on diskriminant.

Teoreem 5.5. (Lokaalse ekstreemumi olemasolu piisavad tingimused). Kui punkt $M_0(x_0, y_0)$ on funktsiooni $f(x, y)$ statsionaarne punkt ja kui funktsiooni $f(x, y)$ esimest, teist ja kolmandat järku osatuletised on pidevad punkti $M_0(x_0, y_0)$ ümbruses, siis punktis $M_0(x_0, y_0)$:

- 1) on ekstreemum, kui $D > 0$,
 - a) lokaalne maksimum, kui $A < 0$,
 - b) lokaalne miinimum, kui $A > 0$;
- 2) puudub ekstreemum, kui $D < 0$;
- 3) jääb küsimus lahtiseks, kui $D = 0$.

Teoreemi 5.5 tõestus baseerub Taylori valemil (5.27), on tehniliselt keeruline ja käesolevas õppevahendis seda tõestust ei tooda.

Näide 5.23. Leida funktsiooni $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$ lokaalsed ekstreemumid.

Leiame esimest järku osatuletised ja võrdsustame need nulliga. Saame lineaarse võrrandisüsteemi, mille lahendamiseks korrutame esimest võrrandit arvuga (-2) .

$$\begin{aligned} f'_x(x, y) = 2x + y - 3 &\equiv 0 & \cdot (-2) &\Rightarrow -4x - 2y + 6 = 0 \\ f'_y(x, y) = x + 2y - 6 &\equiv 0 & & \underbrace{x + 2y - 6 = 0} \end{aligned}$$

$$\text{Võrrandeid liites saame} \quad -3x = 0,$$

millest $x = 0$. Edasi leiame esimesest võrrandist $2x + y - 3 = 0$, et $y = 3$ ja saame ühe statsionaarse punkti $M(0; 3)$, milles vastavalt teoreemile 5.4 võib olla lokaalne ekstreemum.

Leiame teist järku osatuletised, mis antud näites on konstandid (sealhulgas punktis $M(0; 3)$). Seega saab tulemused kohe tähistada vastavalt märkusele 5.5:

$$\begin{aligned} f''_{xx}(x, y) &= 2 = A, \\ f''_{xy}(x, y) &= 1 = B, \\ f''_{yy}(x, y) &= 2 = C. \end{aligned}$$

Arvutame diskriminandi $D = AC - B^2 = 2 \cdot 2 - 1 = 3 > 0$. Kuna $D > 0$, siis vastavalt teoreemile 5.5 on punktis $M(0; 3)$ lokaalne ekstreemum. Kuna $A = 2 > 0$, siis on punktis $M(0; 3)$ lokaalne miinimum. Arvutame $\min f(0; 3) = 9 - 6 \cdot 3 = -9$.

Näide 5.24. Leida funktsiooni $f(x, y) = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y$ lokaalsed ekstreemumid.

Leiame esimest järku osatuletised ja võrdsustame need nulliga:

$$\begin{aligned} f'_x(x, y) = y \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} - 1 &\equiv 0, & \Rightarrow y &= 2\sqrt{x}, \\ f'_y(x, y) = \sqrt{x} - 2y + 6 &\equiv 0. \end{aligned}$$

Avaldame esimesest võrrandist $y = 2\sqrt{x}$ ja paneme selle teise võrrandisse. Saame $\sqrt{x} - 4\sqrt{x} + 6 \equiv 0$ ehk $\sqrt{x} = 2$, millest $x = 4$. Arvutame $y = 2\sqrt{4} = 4$ ja saame ühe statsionaarse punkti $M(4; 4)$, milles võib olla lokaalne ekstreemum.

Leiame teist järku osatuletised ja arvutame nende väärtused punktis $M(4;4)$:

$$\begin{aligned} f''_{xx}(x, y) &= \frac{y}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot x^{-\frac{3}{2}}, & A &= f''_{xx}(4;4) = -\frac{4}{4} \cdot \frac{1}{8} = -\frac{1}{8} < 0, \\ f''_{xy}(x, y) &= \frac{1}{2\sqrt{x}}, & B &= f''_{xy}(4;4) = \frac{1}{4}, \\ f''_{yy}(x, y) &= -2, & C &= f''_{yy}(4;4) = -2. \end{aligned}$$

Kuna diskriminant $D = AC - B^2 = \left(-\frac{1}{8}\right) \cdot (-2) - \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{3}{16} > 0$ on nullist suurem, siis punktis $M(4;4)$ on ekstreemum. Et $A = -\frac{1}{8} < 0$, siis on punktis $M(4;4)$ lokaalne maksimum.

$$\text{Arvutame } \max f(4;4) = 4\sqrt{4} - 4^2 - 4 + 6 \cdot 4 = 12.$$

Näide 5.25. Leida funktsiooni $f(x, y) = x^3 y^2 (6 - x - y)$ lokaalsed ekstreemumid.

Esitame funktsiooni kujul $f(x, y) = 6x^3 y^2 - 4x^4 y^2 - x^3 y^3$ ja leiame esimest järku osatuletised:

$$\begin{aligned} f'_x(x, y) &= 18x^2 y^2 - 4x^3 y^2 - 3x^2 y^3, \\ f'_y(x, y) &= 12x^3 y - 2x^4 - 3x^3 y^2. \end{aligned}$$

Toome ühised tegurid sulgude ette ja võrdsustame osatuletised nulliga:

$$\begin{aligned} x^2 y^2 (18 - 4x - 3y) &= 0, \\ x^3 y (12 - 2x - 3y) &= 0. \end{aligned}$$

Üks statsionaarne punkt on ilmselt $M_1(0;0)$. Teise statsionaarse punkti saame sulgavaldisi nulliga võrdsustades, mis annab lineaarse võrrandisüsteemi:

$$\begin{aligned} 18 - 4x - 3y &= 0 & \text{ehk} & & 4x + 3y &= 18 \\ 12 - 2x - 3y &= 0 & & & 2x + 3y &= 12 \cdot (-1) \Rightarrow -2x - 3y = -12 \end{aligned}$$

Korrutame teist võrrandit (-1) -ga ja liidame võrrandid. Siis saame $2x = 6$, millest $x = 3$. Näiteks esimesest võrrandist arvutame $y = \frac{1}{3}(18 - 4 \cdot 3) = 2$ ning saame teise statsionaarse punkti $M_2(3;2)$.

Leiame teist järku osatuletised ja arvutame nende väärtused punktis $M_2(3;2)$:

$$\begin{aligned} f''_{xx}(x, y) &= 36xy^2 - 12x^2 y^2 - 6xy^3, & A_2 &= f''_{xx}(3;2) = -144 < 0, \\ f''_{xy}(x, y) &= 36x^2 y - 8x^3 y - 9x^2 y^2, & B_2 &= f''_{xy}(3;2) = -108, \\ f''_{yy}(x, y) &= 12x^3 - 2x^4 - 6x^3 y, & C_2 &= f''_{yy}(3;2) = -162. \end{aligned}$$

Kuna diskriminant $D_2 = A_2 C_2 - B_2^2 = (-144) \cdot (-162) - (108)^2 = 11664 > 0$ on nullist suurem, siis punktis $M_2(3;2)$ on ekstreemum. Et $A = -144 < 0$, siis on punktis $M_2(3;2)$ lokaalne maksimum.

$$\text{Arvutame } \max f(3;2) = 3^3 \cdot 2^2 \cdot (6 - 3 - 2) = 108.$$

Punktis $M_1(0;0)$ tuleb diskriminant ilmselt võrdne nulliga ($D_1 = 0$) ja nii jätab teoreem 5.5 küsimuse ekstreemumi olemasolust punktis $M_1(0;0)$ lahtiseks.

Näide 5.26. Leida funktsiooni $f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$ lokaalsed ekstreemumid.

Leiame esimest järku osatuletised ja võrdsustame need nulliga:

$$\begin{aligned} f'_x(x, y) &= 3x^2 + 3y^2 - 15 \equiv 0, \\ f'_y(x, y) &= 6xy - 12 \equiv 0, \quad \Rightarrow \quad x = \frac{2}{y}. \end{aligned}$$

Jagame esimese võrrandi kolmeka $x^2 + y^2 - 5 = 0$ ja paneme siia teisest võrrandist avaldatud $x = \frac{2}{y}$ ning saame $\frac{4}{y^2} + y^2 - 5 = 0$ ehk $y^4 - 5y^2 + 4 = 0$. Asendame selles biruutvõrrandis $y^2 = k$ ja saame ruutvõrrandi $k^2 - 5k + 4 = 0$, mille lahendid on $k_1 = 4$ ja $k_2 = 1$. Biruutvõrrandil $y^4 - 5y^2 + 4 = 0$ on järelikult neli lahendit, millele vastavad x väärtused arvutame valemiga $x = \frac{2}{y}$. Niisiis saame neli statsionaarset punkti:

$$\begin{aligned} y_1 &= 2 & x_1 &= 1 & M_1(1; 2) \\ y_2 &= -2 & x_2 &= -1 & M_2(-1; -2) \\ y_3 &= 1 & x_3 &= 2 & M_3(2; 1) \\ y_4 &= -1 & x_4 &= -2 & M_4(-2; -1) \end{aligned}$$

Leiame teist järku osatuletised

$$f''_{xx}(x, y) = 6x, \quad f''_{xy}(x, y) = 6y, \quad f''_{yy}(x, y) = 6x.$$

Lokaalse ekstreemumi olemasolu ja liiki tuleb kontrollida igas statsionaarses punktis eraldi.

Alustame punktist $M_1(1; 2)$ ja arvutame selles punktis teist järku osatuletiste väärtused ja diskriminandi:

$$A_1 = 6 > 0, \quad B_1 = 12, \quad C_1 = 6, \quad D_1 = A_1 C_1 - B_1^2 = 6 \cdot 6 - 12^2 = -108 < 0.$$

Kuna $D_1 < 0$, siis punktis $M_1(1; 2)$ ekstreemum puudub.

Punktis $M_2(-1; -2)$ on $A_2 = -6 < 0$, $B_2 = -12$, $C_2 = -6$, $D_2 = A_2 C_2 - B_2^2 = (-6) \cdot (-6) - (-12)^2 = -108 < 0$.

Kuna $D_2 < 0$, siis punktis $M_2(-1; -2)$ ekstreemum puudub.

Punktis $M_3(2; 1)$ on $A_3 = 12 > 0$, $B_3 = 6$, $C_3 = 12$, $D_3 = A_3 C_3 - B_3^2 = 12 \cdot 12 - 6^2 = 108 > 0$.

Kuna $D_3 > 0$, siis punktis $M_3(2; 1)$ on ekstreemum. Kuna $A_3 = 12 > 0$, siis punktis $M_3(2; 1)$ on lokaalne miinimum. Arvutame $\min f(2; 1) = 2^3 + 3 \cdot 2 \cdot 1^2 - 15 \cdot 2 - 12 \cdot 1 = -28$.

Punktis $M_4(-2; -1)$ on $A_4 = -12 < 0$, $B_4 = -6$, $C_4 = -12$, $D_4 = A_4 C_4 - B_4^2 = (-12) \cdot (-12) - (-6)^2 = 108 > 0$.

Kuna $D_4 > 0$, siis punktis $M_4(-2; -1)$ on ekstreemum. Kuna $A_4 = -12 < 0$, siis punktis $M_4(-2; -1)$ on lokaalne maksimum. Arvutame $\max f(-2; -1) = (-2)^3 + 3 \cdot (-2) \cdot (-1)^2 - 15 \cdot (-2) - 12 \cdot (-1) = 28$.

Näide 5.27. Leida funktsiooni $f(x, y) = e^{x-y}(x^2 - 2y^2)$ lokaalsed ekstreemumid.

Leiame esimest järku osatuletised:

$$\begin{aligned}f'_x(x, y) &= e^{x-y}(x^2 - 2y^2) + e^{x-y} \cdot 2x = e^{x-y}(x^2 - 2y^2 + 2x), \\f'_y(x, y) &= -e^{x-y}(x^2 - 2y^2) + e^{x-y} \cdot (-4y) = -e^{x-y}(x^2 - 2y^2 + 4y).\end{aligned}$$

Kuna eksponentfunktsioon kunagi nulliga ei võrdu (vt punkti 2.5 ja joonist 2.1), siis saame statsionaarsed punktid süsteemist

$$\begin{aligned}x^2 - 2y^2 + 2x &= 0, \\-x^2 + 2y^2 - 4y &= 0.\end{aligned}$$

Võrrandeid liites saame $2x - 4y = 0$, millest avaldame $x = 2y$ ja paneme selle teise võrrandisse: $-4y^2 + 2y^2 - 4y = 0$ ehk $y^2 + 2y = 0$, millest $y_1 = 0$ ja $y_2 = -2$. Seosest $x = 2y$ saame $x_1 = 0$ ja $x_2 = -4$ ning statsionaarseid punkte on seega kaks: $M_1(0;0)$ ja $M_2(-4;-2)$.

Leiame teist järku osatuletised

$$\begin{aligned}f''_{xx}(x, y) &= e^{x-y}(x^2 - 2y^2 + 2x) + e^{x-y}(2x + 2) = e^{x-y}(x^2 - 2y^2 + 4x + 2), \\f''_{xy}(x, y) &= -e^{x-y}(x^2 - 2y^2 + 2x) + e^{x-y}(-4y) = -e^{x-y}(x^2 - 2y^2 + 2x + 4y), \\f''_{yy}(x, y) &= e^{x-y}(x^2 - 2y^2 + 4y) - e^{x-y}(-4y + 4) = e^{x-y}(x^2 - 2y^2 + 8y - 4).\end{aligned}$$

Punktis $M_1(0;0)$ on $A_1 = 2 > 0$, $B_1 = 0$, $C_1 = -4$, $D_1 = A_1C_1 - B_1^2 = 2 \cdot (-4) - 0 = -8 < 0$. Kuna diskriminant $D_1 < 0$, siis punktis $M_1(0;0)$ ekstreemum puudub.

Punktis $M_2(-4;-2)$ arvutame:

$$\begin{aligned}A_2 &= e^{-2}(16 - 8 - 16 + 2) = -6e^{-2} < 0, \\B_2 &= -e^{-2}(16 - 8 - 8 - 8) = 8e^{-2}, \\C_2 &= e^{-2}(16 - 8 - 16 - 4) = -12e^{-2}, \\D_2 &= (-6e^{-2}) \cdot (-12e^{-2}) - (8e^{-2})^2 = (72 - 64)e^{-4} = 8e^{-4} > 0.\end{aligned}$$

Kuna $D_2 > 0$, siis punktis $M_2(-4;-2)$ on ekstreemum. Kuna $A_2 = -6e^{-2} < 0$, siis punktis $M_2(-4;-2)$ on lokaalne maksimum. Arvutame $\max f(-4;-2) = e^{-2}(16 - 8) = 8e^{-2} \approx 1,083$.

5.10. KAHE MUUTUJA FUNKTSIOONI GLOBAALSED EKSTREEMUMID

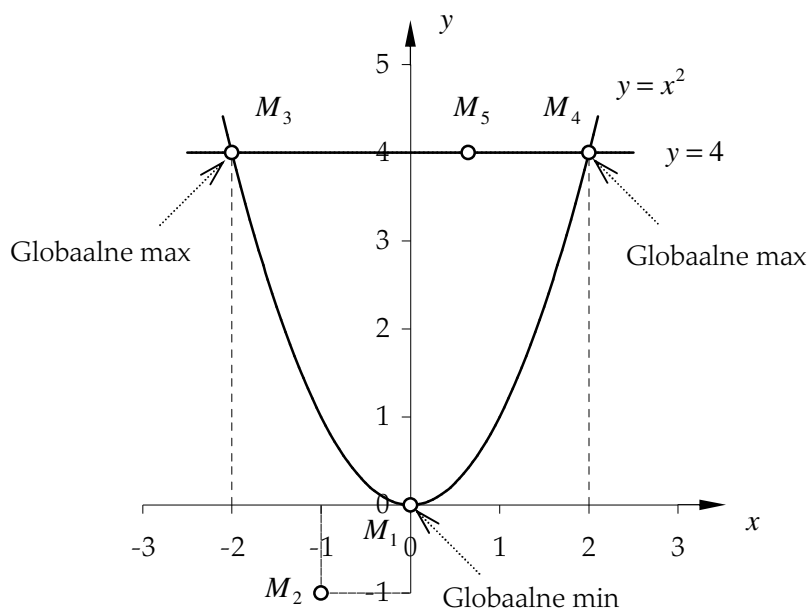
Kahe muutuja funktsiooni $z = f(x, y)$ globaalsete ekstreemumite all mõeldakse selle funktsiooni suurimat ja vähimat väärtust kinnises tõkestatud piirkonnas, kusjuures selle piirkonna rajajooned loetakse kuuluvaks piirkonda. Kahe muutuja funktsiooni globaalsete ekstreemumite leidmise eeskiri meenutab ühe muutuja funktsiooni globaalsete ekstreemumite leidmist, vt punkti 4.4 ja juhust 4.1.

Juhis 5.4. Diferentseeruva kahe muutuja funktsiooni $z = f(x, y)$ globaalsed ekstreemumid kinnises tõkestatud tasapinnalises piirkonnas leitakse järgmise skeemi alusel.

- Leitakse funktsiooni $f(x, y)$ kriitilised punktid ja arvutatakse funktsiooni väärtus vaadeldavas piirkonda jäävates kriitilistes punktides (siinjuures ei ole vaja teada, kas funktsioonil $f(x, y)$ on mingis kriitilises punktis lokaalne ekstreemum või mitte).
- Uuritakse funktsiooni $f(x, y)$ käitumist vaadeldava piirkonna rajajoontel.
 - Rajajoont moodustavate pidevate joonte võrrandite abil taandatakse kahe muutuja funktsioon $f(x, y)$ ühe muutuja funktsioonideks.
 - Leitakse nende ühe muutuja funktsioonide globaalsed ekstreemumid (nii nagu punktis 4.4).
- Võrreldakse funktsiooni $f(x, y)$ väärtusi vaadeldavas piirkonda jäävates kriitilistes punktides ja piirkonna rajapunktides (s.o võrreldakse käesoleva skeemi osade 1 ja 2b arvutustulemusi). Suurim neist väärtustest on globaalne maksimum, väikseim aga globaalne miinimum.

Näide 5.28. Leida funktsiooni $f(x, y) = 2x^3 + 4x^2 + y^2 - 2xy$ globaalsed ekstreemumid kinnises piirkonnas, mis on piiratud joontega $y = x^2$ ja $y = 4$.

Vaadeldavat piirkonda on kujutatud joonisel 5.4. Ülesande ideed võib selgitada järgmiselt. Valime punkte ainult antud piirkonnast või selle rajajoontelt (mis loetakse kuuluvaks piirkonda). Asetame nende punktide koordinaadid funktsiooni $f(x, y) = 2x^3 + 4x^2 + y^2 - 2xy$ avaldisse ja arvutame funktsiooni väärtuse valitud punktides. Huvi pakub, kus paikneb piirkonnas niisugune punkt, milles funktsioonil on suurim väärtus (globaalne maksimum) ja kus on piirkonnas niisugune punkt, milles funktsioonil on vähim väärtus (globaalne miinimum). Kuna punkte on piirkonnas lõpmata palju, siis proovimise teel vastuseni ei jõua, vaid lähtuda tuleb eespool juhises 5.4 toodud algoritmist.



Joonis 5.4. Parabooliga $y = x^2$ ja sirgega $y = 4$ piiratud piirkond

Leiame funktsiooni $f(x, y) = 2x^3 + 4x^2 + y^2 - 2xy$ esimest järku osatuletised

$$\begin{aligned} f'_x(x, y) &= 6x^2 + 8x - 2y, \\ f'_y(x, y) &= 2y - 2x. \end{aligned}$$

ja võrdsustame need nulliga

$$\begin{cases} 6x^2 + 8x - 2y = 0 \\ 2y - 2x = 0 \end{cases} \text{ ehk } \begin{cases} 3x^2 + 4x - y = 0 \\ y - x = 0 \end{cases} \Rightarrow y = x \Rightarrow 3x^2 + 4x - x = 0 \Rightarrow x(x+1) = 0$$

Eelneval võrrandisüsteemil on kaks lahendit

$$\begin{aligned} x_1 &= 0, \quad y_2 = 0, \\ x_2 &= -1, \quad y_2 = -1, \end{aligned}$$

millest saame kaks statsionaarset (üldisemalt öeldes kriitilist) punkti $M_1(0;0)$ ja $M_2(-1;-1)$. Nagu jooniselt 5.4 näha, jääb punkt $M_2(-1;-1)$ vaadeldavast piirkonnast välja ning seega edasist huvi ei paku. Punkt $M_1(0;0)$ on piirkonna rajajoonel (mis loetakse piirkonda kuuluvaks), mistõttu arvutame selles punktis funktsiooni väärtuse

$$f(M_1) = f(0;0) = 0. \quad (5.36)$$

Edasi uurime funktsiooni $f(x, y) = 2x^3 + 4x^2 + y^2 - 2xy$ käitumist rajajoonel $y = 4$. Paneme rajajoone võrrandist y väärtuse (s.o arvu 4) funktsiooni $f(x, y)$ avaldisse ning saame ühe muutuja funktsiooni

$$\varphi(x) = 2x^3 + 4x^2 - 8x + 16.$$

Leiame selle ühe muutuja funktsiooni globaalsed ekstreemumid lõigus $[-2;2]$ (jooniselt 5.4 on see lõik punktide $M_3(-2;4)$ ja $M_4(2;4)$ vahel). Funktsiooni $\varphi(x)$ esimene tuletis on $\varphi'(x) = 6x^2 + 8x - 8$, mida nulliga võrdsustades ja kahega jagades saame ruutvõrrandi $3x^2 + 4x - 4 = 0$, mille lahendid $x_3 = \frac{2}{3}$ ja $x_4 = -2$ on funktsiooni $\varphi(x)$ statsionaarsed punktid. Arvutame funktsiooni $\varphi(x)$ väärtused nendes punktides (millest üks osutub lõigu $[-2;2]$ vasakpoolseks otspunktiks) ning samuti lõigu $[-2;2]$ parempoolse otspunktis kohal $x_5 = 2$. Sisuliselt on need kahe muutuja funktsiooni $f(x, y)$ väärtused punktides $M_3(-2;4)$, $M_4(2;4)$ ja $M_5\left(\frac{2}{3};4\right)$ (vt joonist 5.4, kus on need punktid näidatud):

$$\begin{aligned} f(M_3) &= f(-2;4) = \varphi(-2) = 32, \\ f(M_4) &= f(2;4) = \varphi(2) = 32, \\ f(M_5) &= f\left(\frac{2}{3};4\right) = \varphi\left(\frac{2}{3}\right) = 13\frac{1}{27}. \end{aligned} \quad (5.37)$$

Uurime funktsiooni $f(x, y) = 2x^3 + 4x^2 + y^2 - 2xy$ käitumist rajajoonel $y = x^2$. Paneme rajajoone võrrandist y avaldise (s.o x^2) funktsiooni $f(x, y)$ avaldisse ning saame ühe muutuja funktsiooni

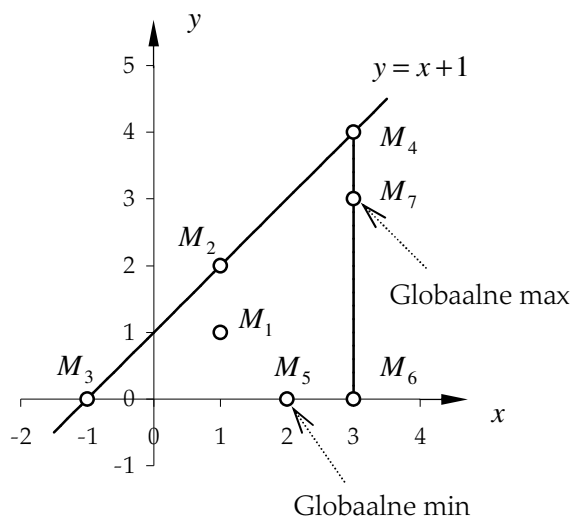
$$\psi(x) = 2x^3 + 4x^2 + x^4 - 2x^3 = x^4 + 4x^2.$$

Leiame selle ühe muutuja funktsiooni $\psi(x)$ globaalsed ekstreemumid lõigus $[-2; 2]$. Arvutame tuletise $\psi'(x) = 4x^3 + 8x$ ja võrdsustame selle tuletise nulliga $4x^3 + 8x = 0$ ehk $x(x^2 + 2) = 0$. Viimasel võrrandil on vaid üks lahend $x_6 = 0$, sest $x^2 + 2 \neq 0$. Arvutada tuleks funktsiooni $\psi(x)$ väärtused kohtadel $x_6 = 0$, $x_4 = -2$ ja $x_5 = 2$ ehk teiste sõnadega funktsiooni $f(x, y)$ väärtused punktides $M_1(0; 0)$, $M_3(-2; 4)$ ja $M_4(2; 4)$. Aga need arvutused on eespool juba tehtud, vt (5.36) ja (5.37). Nii et funktsiooni $f(x, y)$ uurimine rajajoonel $y = x^2$ ei lisanud eelnevale midagi uut.

Kokkuvõtteks peame võrdlema arvutustulemusi (5.36) ja (5.37). Väikseim neist arvudest $f(M_1) = f(0; 0) = 0$ on funktsiooni $f(x, y) = 2x^3 + 4x^2 + y^2 - 2xy$ vähim väärtus (globaalne miinimum) antud piirkonnas. Suurim väärtus (globaalne maksimum) saavutatakse kahes punktis $f(M_3) = f(-2; 4) = 32$ ja $f(M_4) = f(2; 4) = 32$.

Näide 5.29. Leida funktsiooni $f(x, y) = x^2 + 2xy - y^2 - 4x$ globaalsed ekstreemumid kinnises piirkonnas, mis on piiratud joontega $y = x + 1$, $y = 0$ ja $x = 3$.

Kõik antud jooned $y = x + 1$, $y = 0$ ja $x = 3$ on sirged ning piirkonnaks osutub kolmnurk, mida on kujutatud joonisel 5.5.



Joonis 5.5. Sirgetega $y = x + 1$, $y = 0$ ja $x = 3$ piiratud piirkond

Leiame funktsiooni $f(x, y) = x^2 + 2xy - y^2 - 4x$ esimest järku osatuletised ja võrdsustame need nulliga

$$\begin{cases} f'_x(x, y) = 2x + 2y - 4 \equiv 0, \\ f'_y(x, y) = 2x - 2y \equiv 0, \Rightarrow y = x. \end{cases}$$

Avaldame teisest võrrandist $y = x$, paneme selle esimesse võrrandisse ja saame $4x - 4 = 0$, millest $x_1 = 1$. Vastav $y_1 = 1$ ja saame ühe statsionaarse (kriitilise) punkti $M_1(1; 1)$, mis jääb vaadeldavasse piirkonda. Seetõttu arvutame punktis $M_1(1; 1)$ funktsiooni väärtuse

$$f(M_1) = f(1; 1) = -2. \tag{5.38}$$

Uurime funktsiooni käitumist rajajoonel $y = x + 1$. Avaldisega $x + 1$ taandame kahe muutuja funktsiooni $f(x, y) = x^2 + 2xy - y^2 - 4x$ ühe muutuja funktsiooniks:

$$\varphi(x) = f(x, x+1) = x^2 + 2x(x+1) - (x+1)^2 - 4x = x^2 + 2x^2 + 2x - x^2 - 2x - 1 - 4x = 2x^2 - 4x - 1.$$

Leiame funktsiooni $\varphi(x)$ globaalsed ekstreemumid lõigus $[-1; 3]$. Selleks arvutame kõigepealt funktsiooni $\varphi(x)$ tuletise ja võrdsustame selle nulliga:

$$\varphi'(x) = 4x - 4 = 0 \Rightarrow x_2 = 1.$$

Eelneva võrrandi lahend $x_2 = 1$ on funktsiooni $\varphi(x)$ statsionaarne punkt. Arvutame funktsiooni $\varphi(x)$ väärtused statsionaarses punktis $x_2 = 1$ ning samuti lõigu $[-1; 3]$ otspunktides kohtadel $x_3 = -1$ ja $x_4 = 3$ (joonisel 5.5 on need punktid $M_2(1; 2)$, $M_3(-1; 0)$ ja $M_4(3; 4)$):

$$\begin{aligned} f(M_2) &= f(1; 2) = \varphi(1) = -3, \\ f(M_3) &= f(-1; 0) = \varphi(-1) = 5, \\ f(M_4) &= f(3; 4) = \varphi(3) = 5. \end{aligned} \tag{5.39}$$

Uurime funktsiooni käitumist rajajoonel $y = 0$ lõigus $[-1; 3]$. Kahe muutuja funktsioon $f(x, y)$ taandub sellel joonel ühe muutuja funktsiooniks $\psi(x) = x^2 - 4x$. Leiame funktsiooni $\psi(x)$ tuletise ja võrdsustame selle nulliga: $\psi'(x) = 2x - 4 \equiv 0 \Rightarrow x_5 = 2$. Saame ühe statsionaarse punkti $x_5 = 2$. Arvutame funktsiooni $\psi(x)$ väärtuse selles statsionaarses punktis $x_5 = 2$ ja lõigu $[-1; 3]$ parempoolses otspunktis (joonisel 5.5 punktides $M_5(2; 0)$ ja $M_4(3; 0)$; lõigu $[-1; 3]$ vasakpoolses otspunktis $M_3(-1; 0)$ on eespool arutus juba tehtud):

$$\begin{aligned} f(M_5) &= f(2; 0) = \psi(2) = -4, \\ f(M_6) &= f(3; 0) = \psi(3) = -3. \end{aligned} \tag{5.40}$$

Uurime funktsiooni käitumist rajajoonel $x = 3$. Kahe muutuja funktsioon $f(x, y)$ taandub sellel joonel ühe muutuja funktsiooniks $\omega(y) = 9 + 6y - y^2 - 12 = 6y - y^2 - 3$. Leida tulevad funktsiooni $\omega(y)$ globaalsed ekstreemumid lõigus $[0; 4]$. Leiame funktsiooni $\omega(y)$ tuletise ja võrdsustame selle nulliga: $\omega'(y) = 6 - 2y \equiv 0 \Rightarrow y_1 = 3$. Arvutame $\omega(y)$ väärtuse statsionaarses punktis $y_1 = 3$ (joonisel 5.5 punktis $M_7(3; 3)$; lõigu $[0; 4]$ otspunktides $M_6(3; 0)$ ja $M_4(3; 4)$ on arvutused varem juba tehtud):

$$f(M_7) = f(3; 3) = \omega(3) = 6. \tag{5.41}$$

Kokkuvõtteks võrdleme arvutustulemusi (5.38) kuni (5.41). Väikseim neist arvudest $f(M_5) = f(2; 0) = -4$ on funktsiooni $f(x, y) = x^2 + 2xy - y^2 - 4x$ vähim väärtus (globaalne miinimum) antud piirkonnas. Suurim väärtus (globaalne maksimum) on punktis $f(M_7) = f(3; 3) = 6$.

5.11. LISATINGIMUSEGA EKSTREEMUMÜLESANNE

Sageli pole ekstreemumülesandes argumendid sõltumatud, vaid on üksteisega seotud mingisuguste lisatingimuste kaudu (näiteks nad peavad rahuldama antud võrrandeid). Vaatleme kahe muutuja funktsiooni $z = f(x, y)$ ekstreemumi leidmist juhul, kui muutujad x ja y on seotud ühe lisavõrrandiga $\varphi(x, y) = 0$. Kui võrrand $\varphi(x, y) = 0$ lahendada näiteks y suhtes ja saadud tulemus, mis on x funktsioon, asetada $f(x, y)$ avaldisse, siis taandub ülesanne ühe muutuja x funktsiooni ekstreemumülesandeks.

Lisatingimusega ekstreemumülesannet saab aga lahendada ilma ühe muutuja funktsioonile üle minemata (ilma võrrandit $\varphi(x, y) = 0$ kas x või y suhtes lahendamata ja seda lahendustulemust $f(x, y)$ avaldisse panemata).

Moodustame funktsioonidest $f(x, y)$ ja $\varphi(x, y)$ uue funktsiooni, nn **Lagrange'i funktsiooni**, kujul

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y), \quad (5.42)$$

kus λ on abimuutuja. Kuna x ja y on omavahel seotud lisatingimusega $\varphi(x, y) = 0$, siis võib avaldises $f(x, y)$ vaadelda y kui ühe muutuja x funktsiooni. Teatavasti aga ühe muutuja funktsioonil võib lokaalne ekstreemum olla kohal, kus selle funktsiooni tuletis võrdub nulliga (definiitsioon 4.3 ja teoreem 4.6):

$$\frac{df(x, y)}{dx} = 0. \quad (5.43)$$

Vastavalt funktsiooni $z = f(x, y)$ täisdiferentsiaali avaldisele (5.21) võime kirjutada

$$dz = df(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy. \quad (5.44)$$

Jagame (5.44) dx -ga ja võrdsustame (5.43) kohaselt nulliga:

$$\frac{df(x, y)}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dx} = 0. \quad (5.45)$$

Lisatingimuse $\varphi(x, y) = 0$ kohta võime kirjutada analoogselt

$$\frac{d\varphi(x, y)}{dx} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{dy}{dx} = 0. \quad (5.46)$$

Moodustame võrranditest (5.45) ja (5.46) uue võrrandi (5.47), mis kehtib kõikides ekstreemumpunktides ja kus λ on esialgu määramata kordaja:

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dx} + \lambda \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{dy}{dx} \right) = 0 \quad (5.47)$$

ehk

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \left(\frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) \frac{dy}{dx} = 0. \quad (5.48)$$

Esialgu määramata olnud kordaja λ valime niisuguse, et (5.48) sulgavaldis tuleks võrdne nulliga.

Niisiis leiame, et lokaalse ekstreemumi kohtades peab olema rahuldatud kolm võrrandit:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0, \\ \varphi(x, y) = 0, \end{cases} \quad \text{ehk} \quad \begin{cases} F'_x = 0, \\ F'_y = 0, \\ F'_\lambda = 0. \end{cases} \quad (5.49)$$

Tähele võib panna, et võrrandisüsteem (5.49) on sisuliselt Lagrange'i funktsiooni (5.42) statsionaarsete punktide leidmise eeskiri. Võrranditest (5.49) on näha, et funktsiooni $z = f(x, y)$ ekstreemumid lisatingimusel $\varphi(x, y) = 0$ võivad olla ainult Lagrange'i funktsiooni $F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y)$ (5.42) statsionaarsetes punktides, kus funktsiooni $F(x, y, \lambda)$ kõik kolm osatuletist üheaegselt võrduvad nulliga.

Toodud tingimus (5.49) on ekstreemumi olemasoluks tarvilik, kuid mitte piisav. Selle üle otsustamiseks, kas funktsiooni $F(x, y, \lambda)$ statsionaarses punktis on ekstreemum või mitte, piisab sageli järeldustest ülesande sisu alusel. Kasutada võib ka punkti 5.9 teoreemis 5.5 toodud ekstreemumi olemasolu piisavaid tingimusi funktsiooni $F(x, y, \lambda)$ kohta, lugedes λ konstantseks.

Kokkuvõtteks võib öelda, et **funktsiooni $z = f(x, y)$ ekstreemumülesanne lisatingimusel $\varphi(x, y) = 0$ taandub Lagrange'i funktsiooni $F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y)$ lokaalse ekstreemumi ülesandele.**

Näide 5.30. Leida funktsiooni $f(x, y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ ekstreemumid lisatingimusel $x + y = 2$.

Moodustame Lagrange'i funktsiooni (5.42):

$$F(x, y, \lambda) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \lambda(x + y - 2),$$

leiame selle funktsiooni osatuletised ja võrdsustame need osatuletised vastavalt tingimusele (5.49) nulliga:

$$\begin{cases} F'_x = -\frac{1}{x^2} + \lambda \equiv 0, \Rightarrow x^2 = \frac{1}{\lambda}, \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}, \\ F'_y = -\frac{1}{y^2} + \lambda \equiv 0, \Rightarrow y^2 = \frac{1}{\lambda}, \Rightarrow y = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}, \\ F'_\lambda = x + y - 2 \equiv 0. \end{cases} \quad (5.50)$$

Avaldame süsteemi (5.50) esimesest võrrandist $x = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$ ja teisest võrrandist $y = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$ ning paneme x ja y avaldised (5.50) viimasesse võrrandisse. Saame $\frac{1}{\sqrt{\lambda}} + \frac{1}{\sqrt{\lambda}} - 2 = 0$, millest $\frac{2}{\sqrt{\lambda}} = 2$ ja $\lambda = 1$. Edasi arvutame $x = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} = \frac{1}{\sqrt{1}} = 1$ ja $y = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} = \frac{1}{\sqrt{1}} = 1$.

Seega süsteemi (5.50) lahendamise annab ühe statsionaarse punkti $M(1;1)$.

Loeme $\lambda = 1$ konstandiks ja kasutame lokaalse ekstreemumi olemasolu piisavaid tingimusi (teoreemi 5.5):

$$\begin{aligned} F'_{xx} &= \frac{2}{x^3}, & F'_{xx}(1;1) &= 2 = A > 0 \Rightarrow \text{min}, \\ F'_{xy} &= 0, & F'_{xy}(1;1) &= 0 = B, \\ F'_{yy} &= \frac{2}{y^3}, & F'_{yy}(1;1) &= 2 = C. \end{aligned}$$

Arvutame diskriminandi $D = AC - B^2 = 2 \cdot 2 - 0 = 4 > 0$. Kuna $D > 0$, siis vastavalt teoreemile 5.5 on punktis $M(1;1)$ lokaalne ekstreemum. Kuna $A = 2 > 0$, siis on punktis $M(1;1)$ Lagrange'i funktsiooni $F(x, y, \lambda)$ lokaalne miinimum. Ühtlasi on see funktsiooni $f(x, y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ miinimum lisatingimusel $x + y = 2$. Arvutame $\min f(1;1) = 2$.

Näide 5.31. Leida funktsiooni $f(x, y) = x + 2y$ ekstreemumid lisatingimusel $x^2 + y^2 = 5$.

Moodustame Lagrange'i funktsiooni (5.42):

$$F(x, y, \lambda) = x + 2y + \lambda(x^2 + y^2 - 5),$$

leime selle funktsiooni osatuletised ja võrdsustame need osatuletised vastavalt tingimusele (5.49) nulliga:

$$\begin{cases} F'_x = 1 + 2\lambda x \equiv 0, \Rightarrow x = -\frac{1}{2\lambda}, \\ F'_y = 2 + 2\lambda y \equiv 0, \Rightarrow y = -\frac{1}{\lambda}, \\ F'_\lambda = x^2 + y^2 - 5 \equiv 0. \end{cases} \quad (5.51)$$

Paneme x ja y avaldised (5.51) viimasesse võrrandisse $\frac{1}{4\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} - 5 = 0$, millest leiame $\lambda^2 = \frac{1}{4}$ ning $\lambda_1 = \frac{1}{2}$ ja $\lambda_2 = -\frac{1}{2}$. Vastavalt seostele (5.51) saame kaks statsionaarset punkti $M_1(-1; -2)$ ja $M_2(1; 2)$.

Leiame funktsiooni $F(x, y, \lambda)$ teist järku osatuletised (lugedes λ konstandiks):

$$F'_{xx} = 2\lambda, \quad F'_{xy} = 0, \quad F'_{yy} = 2\lambda.$$

Punktis $M_1(-1; -2)$ on $\lambda_1 = \frac{1}{2}$. Arvutame $A_1 = 1$, $B_1 = 0$, $C_1 = 1$, $D_1 = A_1C_1 - B_1^2 = 1$. Kuna diskriminant $D_1 > 0$ ja $A_1 > 0$, siis on punktis $M_1(-1; -2)$ miinimum, kusjuures $\min f(-1; -2) = -5$.

Punktis $M_2(1; 2)$ on $\lambda_2 = -\frac{1}{2}$. Arvutame $A_2 = -1$, $B_2 = 0$, $C_2 = -1$, $D_2 = A_2C_2 - B_2^2 = 1$. Kuna $D_2 > 0$ ja $A_2 < 0$, siis on punktis $M_2(1; 2)$ maksimum, kusjuures $\max f(1; 2) = 5$.

Märkus 5.6. Näitele 5.31 võib anda geomeetrilise tõlgenduse. Võrrand $z = x + 2y$ esitab tasapinda ja võrrand $x^2 + y^2 = 5$ silindrit (mille moodustajad on paralleelsed z -teljega). Otsitakse z suurimat ja vähimat väärtust nende pindade lõikejoonel. Vastuseks ongi eespool leitud $\max f(1; 2) = 5$ ja $\min f(-1; -2) = -5$.

KIRJANDUS

1. Aasma, A.; Kallam, H.; Levin, A. (2005). Majandusmatemaatika alused. Tallinn: Kirjastus Ilo, 334 lk.
2. Diferentsiaal- ja integraalarvutus. Kõrgema matemaatika teatmik II. (1978). Tallinn: Tallinna Polütehniline Instituut, 103 lk.
3. Kangro, G. (1965). Matemaatiline analüüs I. Tallinn: Kirjastus Eesti Raamat, 468 lk.
4. Kangro, G. (1968). Matemaatiline analüüs II. Tallinn: Kirjastus Valgus, 522 lk.
5. Käerdi, H. (2007). Lineaaralgebra elemendid. Teine trükk. Tallinn: Sisekaitseakadeemia, 52 lk.
6. Käerdi, H. (2006). Arvutusmeetodid. Teine, täiendatud trükk. Tallinn: Sisekaitseakadeemia, 44 lk.
7. Laigna, K. (2003). Kõrgema matemaatika põhiteadmised rakendusspetsialistidele ja üliõpilastele. Tallinn: Teadusloome, 418 lk.
8. Lamp, J.; Tammela, P.; Puusemp, P. (1983). Abiks majandusmatemaatika õppijaile III. Piirväärtuste teooria ja diferentsiaalrvutus. Tallinn: Tallinna Polütehniline Instituut, 223 lk.
9. Loone, L.; Soomer, V. (2007). Matemaatilise analüüsi algkursus. Tartu: Tartu Ülikooli Kirjastus, 335 lk.
10. Lõhmus, A.; Petersen, I.; Roos, H. (1982). Kõrgema matemaatika ülesannete kogu. Neljas, muudetud ja täiendatud trükk. Tallinn: Kirjastus Valgus, 604 lk.
11. Piskunov, N. S. (1981). Diferentsiaal- ja integraalarvutus I. Teine, parandatud ja täiendatud trükk. Tallinn: Kirjastus Valgus, 494 lk.
12. Pungar, E.; Ruubel, K. (1996). Teatmik majandusmatemaatika õppijaile I. Tallinn: Tallinna Tehnikaülikool, 103 lk.
13. Päeva, H. (1997). Matemaatiline analüüs. Tallinn: Eesti Riigikaitse Akadeemia, 180 lk.
14. Reimers, E. (1988). Matemaatilise analüüsi praktikum I. Tallinn: Kirjastus Valgus, 231 lk.
15. Reimers, E. (1988). Matemaatilise analüüsi praktikum II. Tallinn: Kirjastus Valgus, 255 lk.
16. Sakkov, E.; Roots, L. (1994). Diferentsiaal- ja integraalarvutus majandusteaduskonna üliõpilastele. Tartu: Tartu Ülikooli Kirjastus, 71 lk.
17. Tammeraid, I. (2002). Matemaatiline analüüs I. Teine, parandatud trükk. Tallinn: Tallinna Tehnikaülikool, 227 lk.
18. Tammeraid, I. (2002). Matemaatiline analüüs II. Tallinn: TTÜ Kirjastus, 235 lk.